

۱ در دنباله‌ی $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ جمله‌ی هفتاد و یکم چقدر از جمله‌ی شصت و نهم بیشتر است؟

- ۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۲ اگر A و B دو مجموعه ناتهی و $n(B - A) = 9$ و $n(A' \cup B') = 18$ و $n(A' \cap B') = 4$ باشد، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳ اگر $a - 4, a - 2, a + 4, b, \dots$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، b کدام است؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۴ حاصل عبارت $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x + y)(x - y)$ به‌ازای $x = 2\sqrt{5}$ و $y = \sqrt{3}$ کدام است؟

- ۱) ۱۹۱ ۲) ۷۹۱ ۳) ۱۵۹۱ ۴) ۳۹۱

۵ اگر $1 < \frac{4x - 1}{x + 2} < 3$ باشد، حاصل $\left| \frac{x - 2}{3} \right|$ با چند عدد صحیح می‌تواند برابر باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶ نمودار $y = 3x^2 + (2m - 3)x + m + \frac{1}{3}$ همواره در بالای نیمساز ناحیه دوم و چهارم است. حدود m کدام است؟

- ۱) $-1 < m < 4$ ۲) $0 < m < 4$ ۳) $1 < m < 5$ ۴) $0 < m < 5$

۷ مجموعه جواب نامعادله $\frac{\sqrt{x} + 6}{x^2 + 3x} > \frac{x + 2}{x}$ کدام است؟

- ۱) $(0, 2)$ ۲) $(-6, -1) \cup (0, 1)$ ۳) $(-3, 0) \cup (0, 2)$ ۴) $(-3, 0)$

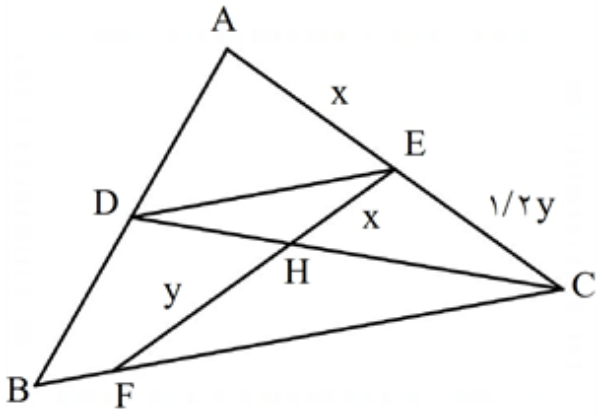
۸ رأس سهمی $y = ax^2 - 2ax$ روی سهمی $y = bx^2 + 4bx - 4$ قرار دارد و برعکس. مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۹ نقاط $A(4, 4)$ ، $B(8, 4)$ و $C(0, -4)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر AM و AH به ترتیب میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC باشند، اندازه MH چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $3y = 5x$ است. اگر $BF = 3$ باشد، اندازه BC کدام است؟



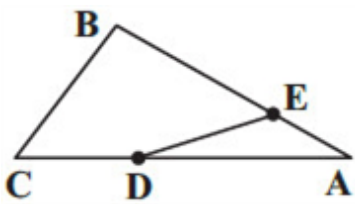
۵/۲۵ (۴)

۵/۷۵ (۳)

۶/۲۵ (۲)

۶/۷۵ (۱)

در مثلث ABC ، رابطه $\frac{AE}{BE} = \frac{CD}{CA} = \frac{1}{3}$ برقرار است. مساحت $BCDE$ چند برابر مساحت ADE است؟



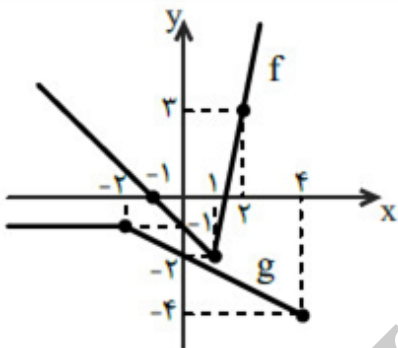
۳ (۴)

۵ (۳)

$\frac{9}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

نمودار f و g در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $(f \cdot g)(2)$ کدام است؟



-۸ (۴)

-۲ (۳)

-۴ (۲)

-۹ (۱)

اگر $1 = \left[\frac{x-3}{2} \right]$ باشد، حاصل $\left[\frac{x+1}{2} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

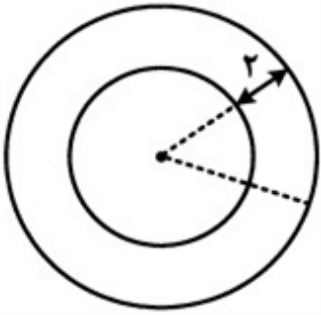
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

در دو دایره هم مرکز مقابل، مساحت سطح حلقه‌ای ۱۶π می‌باشد، نسبت طول‌های دو کمان روبه‌رو به یک زاویه مرکزی کدام است؟



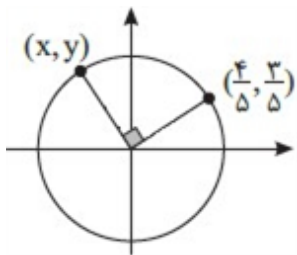
$\frac{۴}{۶}$ (۴)

$\frac{۲}{۳}$ (۳)

$\frac{۲}{۴}$ (۲)

$\frac{۳}{۵}$ (۱)

در دایره‌ی مثلثاتی مقابل حاصل $x + y$ کدام است؟



$-\frac{۷}{۵}$ (۴)

$-\frac{۱}{۵}$ (۳)

$\frac{۷}{۵}$ (۲)

$\frac{۱}{۵}$ (۱)

اگر $\text{Log}_{۵}^{۲۰} = a$ و $\text{Log}_{۲۵}^۹ = b$ باشد، مقدار $\text{Log}_{۶}^{۷۵}$ برحسب a و b کدام است؟

$\frac{b}{b+a+۱}$ (۴)

$\frac{۲b+۴}{۲b+a-۱}$ (۳)

$\frac{۲b}{۲b+a-۱}$ (۲)

$\frac{b+۲a}{۲b+a-۱}$ (۱)

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a + [x] & x < ۰ \\ b(-1)^{\lfloor \frac{x+1}{x+2} \rfloor} & x = ۰ \\ \frac{\text{Sin } x}{\sqrt{1-\text{Cos } x}} & x > ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوسته باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.)

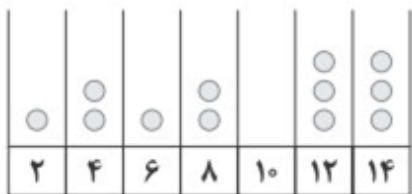
-۱ (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{۲}$ (۲)

$-\sqrt{۲}$ (۱)

با توجه به نمودار نقطه‌ای زیر چه تعداد از عبارت زیر درست هستند؟
 الف) مد داده‌ها برابر ۳ است.
 ب) چارک اول داده‌ها ۵ است.
 پ) میانه داده‌ها برابر ۱۰ است.
 ت) دامنه میان چارکی داده‌ها برابر ۷ است.



- یک (۱) دو (۲) سه (۳) چهار (۴)

شانس برد یک تیم فوتبال در یک مسابقه، به شرط آنکه داور بد قضاوت کند، ۶۰٪ است و احتمال آنکه داور بد قضاوت کند و آن تیم ببرد، ۲۴٪ است. احتمال آنکه داور خوب قضاوت کند چقدر است؟

- ۱) ۵۰٪ (۱) ۲) ۶۰٪ (۲) ۳) ۶۴٪ (۳) ۴) ۷۶٪ (۴)

ترکیبی از ۴ ماده‌ی شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده‌ی A ، $\frac{1}{5}$ و

احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده‌ی A واکنش نشان دهد احتمال واکنش نشان داده ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. اگر A واکنش نشان ندهد با چه احتمالی B واکنش نشان می‌دهد؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ (۱) ۲) $\frac{15}{67}$ (۲) ۳) $\frac{7}{112}$ (۳) ۴) $\frac{13}{112}$ (۴)

درون ظرف اول دو سیب و دو گلابی و در ظرف دوم سه سیب و یک گلابی قرار دارد. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر زوج آمد یک میوه از ظرف اول را به ظرف دوم انتقال می‌دهیم. اگر فرد آمد یک میوه از ظرف دوم را به ظرف اول منتقل می‌کنیم. اکنون ظرفی با میوه بیشتر را انتخاب و از آن میوه‌ای خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این میوه سیب است؟

- ۱) $\frac{3}{8}$ (۱) ۲) $\frac{5}{8}$ (۲) ۳) $\frac{3}{4}$ (۳) ۴) $\frac{2}{3}$ (۴)

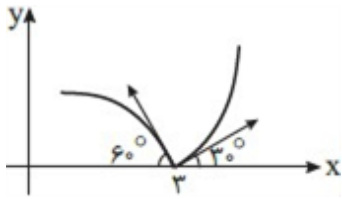
خط $x + y = 4$ بر دایره $x^2 + y^2 + mx - 4y + 1 = 0$ مماس است. کدام خط بر این دایره عمود است؟ ($m > 4$)

- ۱) $x + y = -\sqrt{2}$ (۱) ۲) $y - x = 4 - \sqrt{2}$ (۲) ۳) $x + y = \sqrt{2}$ (۳) ۴) $y - x = \sqrt{2} - 4$ (۴)

به ازای چند مقدار طبیعی برای m ، تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + m}{4x + 1}$ فاقد اکستریم نسبی خواهد بود؟

- ۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) صفر (۳) ۴) بی‌شمار (۴)

۲۴ نمودار تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x = 3$ به صورت شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3-h) + f(3+h)}{\frac{1}{2}h^2 + h}$ کدام است؟



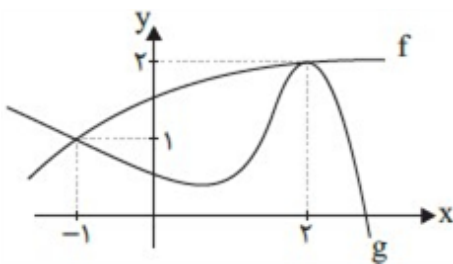
$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{13\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۱)

۲۵ با توجه به نمودار توابع f و g ، حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f(x) - g(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{g(x) - 2}{g(x) - f(x)}$ به ترتیب کدام است؟



$-\infty, -\infty$ (۴)

$+\infty, -\infty$ (۳)

$-\infty, +\infty$ (۲)

$+\infty, +\infty$ (۱)

۲۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 1}} - \sqrt{\frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x-1}} \right)$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

-2 (۲)

2 (۱)

۲۷ از معادله $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ چند جواب متمایز برای x در فاصله $(0, 2\pi)$ به دست می‌آید؟

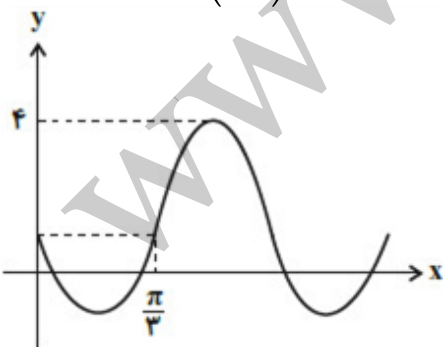
4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۲۸ بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - 3 \cos\left(\frac{2\pi}{2} - bx\right)$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام است $f\left(\frac{7\pi}{18}\right)$ ؟



3 (۴)

$\frac{7}{2}$ (۳)

$\frac{2}{2}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

۲۹ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ و $(f^{-1} \circ g)(x) = f(x)$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام است؟

$$\frac{5x-1}{10-x} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5x+1}{x-10} \quad \text{۳}$$

$$\frac{5x+1}{x+10} \quad \text{۲}$$

$$\frac{5x-1}{x+10} \quad \text{۱}$$

۳۰ نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$ نمودار وارون خود را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB چه قدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{2} \quad \text{۲}$$

$$7 \quad \text{۱}$$

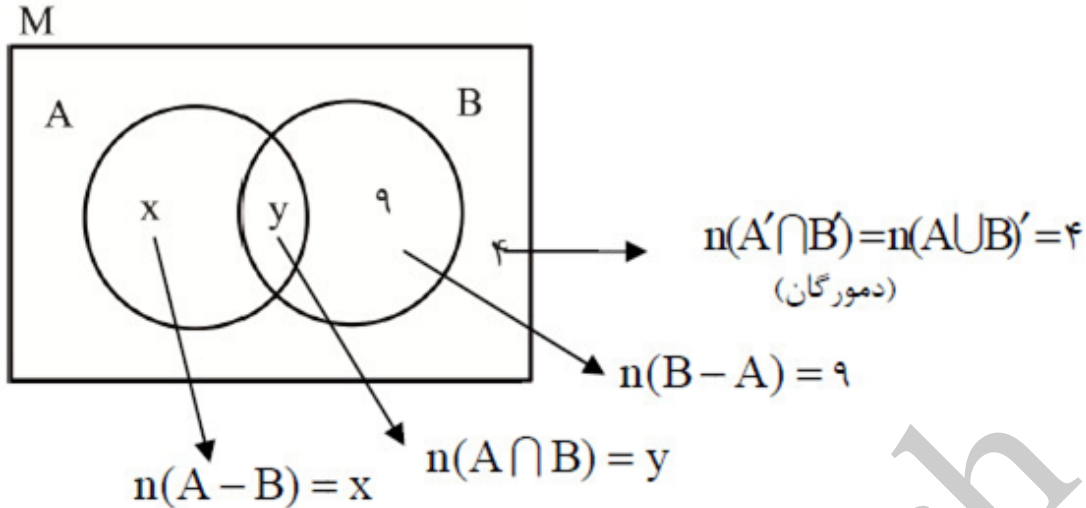
www.rapitech.com

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روند جملات نشان می‌دهد که سه جمله‌ی اول مدام تکرار می‌شود. جمله‌ی سوم، ششم، نهم و ... و شصت و نهم با هم برابرند (زیرا ۶۹ مضرب ۳ است)

$$a_{69} = a_3 = -1, a_{70} = 4, a_{71} = 2$$

$$a_{71} - a_{69} = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از نمودار ون:



$$n(A' \cup B') = 18 \Rightarrow n(A \cap B)' = 18$$

$$x + 9 + 4 = 18 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow n(A - B) = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{a-4}{x}, \frac{a-2}{y}, \frac{a+4}{z}, b, \dots$$

اگر z و y و x سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، ابتدا نسبت مشترک را محاسبه می‌کنیم:

$$r = \frac{a-2}{a-4} = \frac{a+4}{a-2}$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 = (a-4)(a+4) \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 - 16$$

اتحاد مزدوج اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\Rightarrow a^2 - 4a - a^2 = -16 - 4 \Rightarrow -4a = -20 \Rightarrow a = \frac{-20}{-4} = 5$$

جای گذاری $a=5$

$$\frac{5-4}{x} = \frac{5-2}{y} = \frac{5+4}{z} = b, \dots \Rightarrow 1, 3, 9, b, \dots$$

$$r = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow b = 9 \times 3 = 27$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(x+y)(x-y)(x^6 + x^2y^2 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^4 + xy^2 + y^4)$$

$$= x^6 - y^6 = (2\sqrt{5})^6 - (\sqrt{3})^6 = 2^6 \times 5^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵

$$\begin{aligned} -1 < \frac{x-1}{x+2} - 2 < 1 &\Rightarrow \left| \frac{x-5}{x+2} \right| < 1 \\ \Rightarrow |x+2| > |x-5| &\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 < x^2 + 4x + 4 \\ \Rightarrow 3x^2 - 24x + 21 < 0 &\Rightarrow 1 < x < 7 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{x-2}{3} < \frac{5}{3} \\ \Rightarrow \left| \frac{x-2}{3} \right| < \frac{5}{3} &\Rightarrow \left| \frac{x-2}{3} \right| = 0, 1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶

$$\begin{aligned} y > -x &\Rightarrow 3x^2 + (2m-3)x + m + \frac{1}{3} > -x \\ \Rightarrow 3x^2 + 2(m-1)x + m + \frac{1}{3} &> 0 \\ \Delta < 0 &\Rightarrow 4(m-1)^2 - 4(3m+1) < 0 \\ \Rightarrow m^2 - 5m < 0 &\Rightarrow 0 < m < 5 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷

$$\begin{aligned} \frac{y_x+6}{x(x+3)} - \frac{x+2}{x} > 0 &\Rightarrow \frac{y_x+6 - (x+2)(x+3)}{x(x+3)} > 0 \\ \Rightarrow \frac{-x^2+2x}{x(x+3)} > 0 &\Rightarrow \frac{2-x}{x+3} > 0 \Rightarrow -3 < x < 2, x \neq 0 \end{aligned}$$

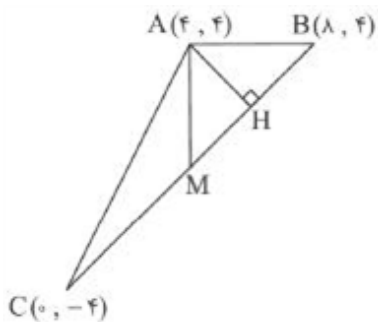
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۸

$$\begin{aligned} S_1(1, -a), S_2(-2, -4-4b) \\ \begin{cases} ax^2 - 2ax = y_1 \\ S_2 \in y_1 \end{cases} &\Rightarrow 4a + 4a = -4 - 4b \Rightarrow 2a + b = -1 \\ \begin{cases} bx^2 + 4bx - 4 = y_2 \\ S_1 \in y_2 \end{cases} &\Rightarrow b + 4b - 4 = -a \Rightarrow a + 5b = 4 \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات، $a = -1$ و $b = 1$ به دست می‌آید پس $a - b = -2$ است.

ابتدا طول میانه AM را به دست می آوریم:



$$BC \text{ وسط } M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right) = (4, 0)$$

$$AM = \sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2} = 4 \quad (1)$$

سپس طول ارتفاع AH را به کمک فاصله رأس A از ضلع BC به دست می آوریم:

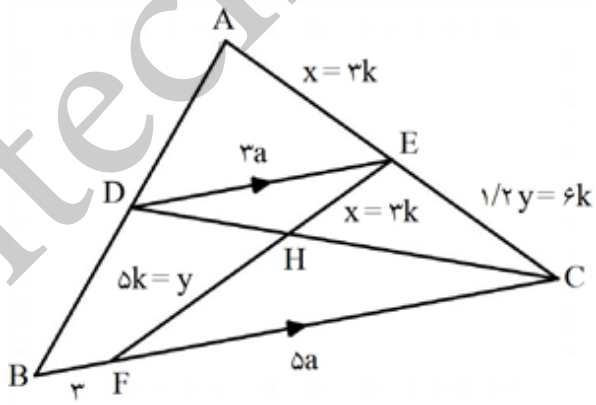
$$m_{BC} = \frac{-4-4}{0-8} = 1 \Rightarrow y - (-4) = 1(x - 0) \Rightarrow BC: x - y - 4 = 0$$

$$AH = \frac{|4 - 4 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

اینک به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث AHM و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

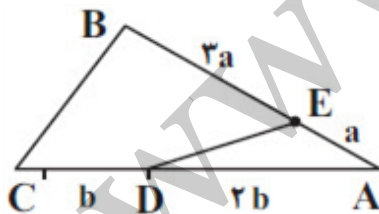


$$x = 3k$$

$$y = 5k$$

$$\frac{3a}{3+5a} = \frac{3k}{9k} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow BC = 3 + 5(0.75) = 6.75$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و نسبت های داده شده داریم:



$$\left\{ \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 4a \times 3b \sin A \\ &= 6 ab \sin A \\ S_{ADE} &= \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin A = \frac{1}{2} a \times 2b \sin A = ab \sin A \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} S_{ABC} = 6 ab \sin A \\ S_{ADE} = ab \sin A \end{cases} \Rightarrow S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{ADE} = 5 ab \sin A$$

$$\frac{S_{BCDE}}{S_{ADE}} = \frac{5 ab \sin A}{ab \sin A} = 5$$

۱۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که $(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2)$ ، مقادیر $f(2)$ و $g(2)$ را می‌یابیم. با توجه به نمودار

$$f(2) = 3 \quad \text{تابع } f \text{ داریم:}$$

نمودار تابع g برای $-2 \leq x \leq 4$ ، یک تابع خطی است. با توجه به اینکه نقاط $(-2, -1)$ و $(4, -4)$ روی نمودار تابع g

قرار دارند، معادله خط گذرنده از این دو نقطه برابر است با:

$$y - (-1) = \frac{-1 - (-4)}{-2 - 4}(x - (-2)) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{6}x - 2, -2 \leq x \leq 4$$

$$\xrightarrow{x=2} g(2) = \frac{-1}{6}(2) - 2 = -3$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = (3)(-3) = -9 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۳

$$\left[\frac{x-3}{2} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x-3}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x-3 < 4 \Rightarrow 5 \leq x < 7 \Rightarrow 6 \leq x+1 < 8$$

$$\Rightarrow 3 \leq \frac{x+1}{2} < 4 \Rightarrow \left[\frac{x+1}{2} \right] = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دو دایره r و $r+2$ است.

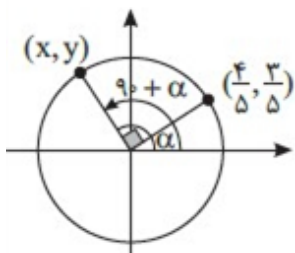
۱۴

$$\pi(r+2)^2 - \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow 4r + 4 = 16 \Rightarrow r = 3, r+2 = 5 \quad \text{سطح حلقه‌ای}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{l_1}{3} = \frac{l_2}{5} \quad \text{پس} \quad \alpha = \frac{l_1}{r} = \frac{l_2}{r+2} \quad \text{می‌دانیم}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵



$$x = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$y = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$x + y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید \log^2 و \log^3 را بر حسب a و b حساب کنیم، زیرا:

۱۶

$$\log^{\frac{75}{6}} = \frac{\log 75}{\log 6} = \frac{\log 3 + \log 25}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 + \log 3 - 2 \log 2}{\log 3 + \log 2} \quad (*)$$

پس داریم:

$$\log^{\frac{20}{5}} = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{\log 2 \times 10}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 2 + \log 10}{\log 10 - \log 2} = \frac{\log 2 + 1}{1 - \log 2} = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\log^{\frac{9}{25}} = \frac{\log 9}{\log 25} = \frac{2 \log 3}{2 - 2 \log 2} = b \Rightarrow \log 3 = b(1 - \log 2) \Rightarrow \log 3 = \frac{2b}{a+1}$$

$$(*) \rightarrow \log^{\frac{75}{6}} = \frac{2 + \frac{2b}{a+1} - \frac{2(a-1)}{a+1}}{\frac{2b}{a+1} + \frac{a-1}{a+1}} = \frac{2b+4}{2b+a-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \xrightarrow{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}x}{|x|} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} a + [x] = a + [0^-] = a - 1 \\ a - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = (1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد نقاط بیانگر فراوانی (تعداد) داده‌ها است. اگر داده‌ها را مرتب کنیم، داریم: ۱۸

$$\overbrace{2, 4, 4, 6, 8, 8, 12, 12, 12, 14, 14, 14} \\ \begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ Q_1 = \frac{4+6}{2} = 5 & Q_2 = \frac{8+12}{2} = 10 & Q_3 = \frac{12+14}{2} = 13 \end{array}$$

مد داده‌ها عدد ۳ نیست، بلکه اعداد ۱۲ و ۱۴ مد هستند. زیرا بیشترین دفعات تکرار (فراوانی) را دارند.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 5 = 8$$

دامنه میان چارکی برابر است با:

بنابراین فقط عبارات «ب» و «پ» صحیح هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

پیشامد برد تیم فوتبال: A

پیشامد قضاوت بد داور: B

$$P(A|B) = 0/6, P(A \cap B) = 0/24$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0/6 = \frac{0/24}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 0/4$$

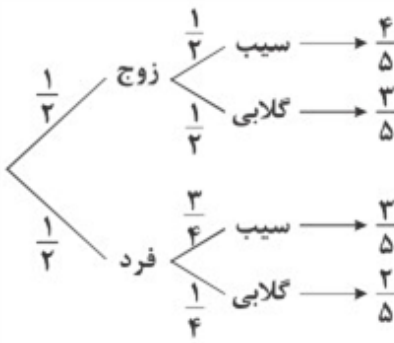
$$\Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 0/6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{\frac{4}{5}} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{30}}{\frac{4}{5}} = \frac{13}{112}$$



$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{9}{40} + \frac{2}{40} = \frac{7}{20} + \frac{11}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲

خطی که بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره از آن برابر با شعاع دایره است. ضمناً خطی بر دایره عمود است که از مرکز آن عبور کند.

$$\text{مرکز دایره } O \left(-\frac{m}{2}, 2 \right) \xrightarrow{\text{فاصله از خط}} \frac{\left| -\frac{m}{2} + 2 - 4 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left| -\frac{m}{2} - 2 \right|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{شعاع دایره} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 16 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 12}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left| \frac{m}{2} + 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{m^2 + 12}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{m^2}{4} + 2m + 4}{2} = \frac{m^2 + 12}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 + 8m + 16 = 2m^2 + 24$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta=32} m = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \xrightarrow{m > 4} m = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس مرکز دایره نقطه $O(-2 - \sqrt{2}, 2)$ است که خط $y + x = -\sqrt{2}$ از آن می‌گذرد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۳

برای اینکه تابع f فاقد اکسترمم نسبی باشد، باید معادله $f'(x) = 0$ فاقد ریشه‌ی ساده باشد. بنابراین داریم:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + m}{4x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x + 7)(4x + 1) - 4(2x^2 + 7x + m)}{(4x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 32x + 7 - 8x^2 - 28x - 4m}{(4x + 1)^2} = \frac{8x^2 + 4x + 7 - 4m}{(4x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^2 + 4x + 7 - 4m = 0$$

پس این معادله باید فاقد ریشه‌ی ساده باشد.

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 16 - 4(8)(7 - 4m) \leq 0 \Rightarrow 1 - 2(7 - 4m) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - 14 + 8m \leq 0 \Rightarrow 8m \leq 13 \Rightarrow m \leq \frac{13}{8}$$

پس m فقط می‌تواند یک مقدار طبیعی را اختیار کند.

با توجه به شکل، تابع در نقطه‌ی $x = 3$ دارای شرایط نقطه‌ی گوشه‌ای است و داریم:

$$f'_+(3) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'_-(3) = \tan (180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{\frac{1}{4}h^2 + h} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-f'(3-h) + 4f'(3+h)}{\frac{1}{4}h + 1} \\ &= -f'_-(3) + 4f'_+(3) = -(-\sqrt{3}) + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f(x) - g(x)} = \frac{2}{+} = +\infty$$

در همسایگی ۲، f بالای g است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{g(x) - 2}{g(x) - f(x)} = \frac{1 - 2}{+} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

$x \rightarrow (-1)^-$

در همسایگی -۱، g بالای f است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 1}} - \sqrt{\frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x-1}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}} - \sqrt{\frac{3x}{x+1} + \frac{2x}{2x-1}} \right) = \sqrt{0+0} - \sqrt{3+1} = -2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر به جای $\sin^2 x$ بنویسیم $1 - \cos^2 x$ داریم:

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = -2 \cos^2 x - \cos x + 2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

در فاصله $(0, 2\pi)$ ، $\cos x$ دو بار به $\frac{1}{2}$ و یک بار به -۱ می‌رسد، در نتیجه ۳ جواب متمایز داریم.

$$f(x) = a + 3 \sin bx$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

با توجه به نمودار، نصف دوره تناوب $\frac{\pi}{3}$ و در نتیجه دوره تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است. داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

در همسایگی $x = 0$ تابع نزولی است، پس $b = -3$ قابل قبول است. از طرفی مقدار ماکزیمم هم برابر ۴ است.

$$y_{\max} = a + 3 = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - 3 \sin 3x \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{18}\right) = 1 - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 1 - 3 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + 3 \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f(x) \Rightarrow g(x) = f \circ f(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 3} = \frac{5x - 1}{-x + 10}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نمودار f را با خط $y = x$ تقاطع می‌دهیم:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{3x + 6}{x - 2} = x \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A = (-1, -1) \\ x = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow B = (6, 6) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴