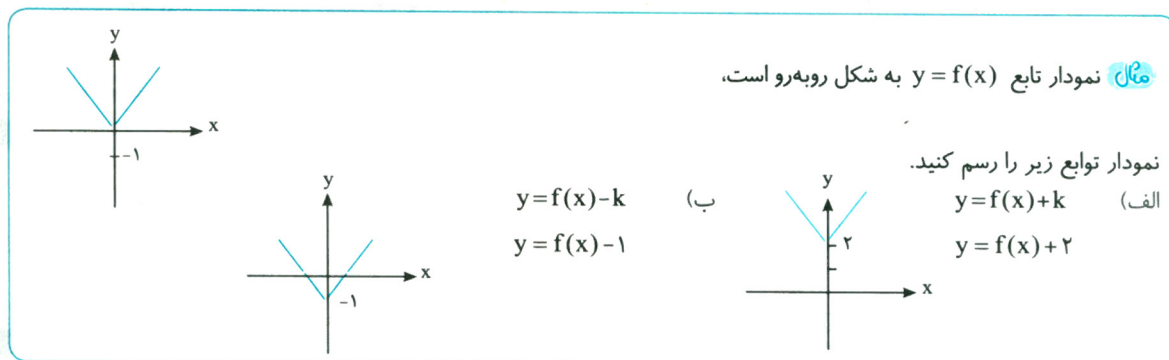


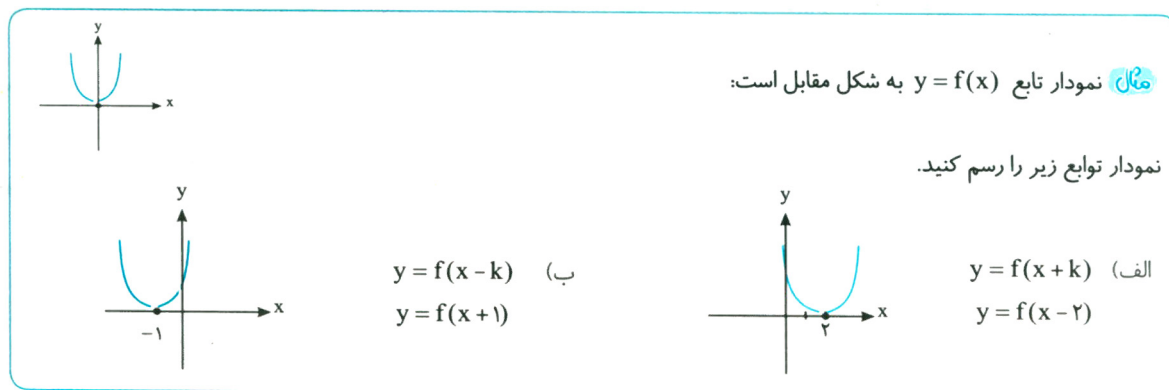


تبدیل نمودار توابع

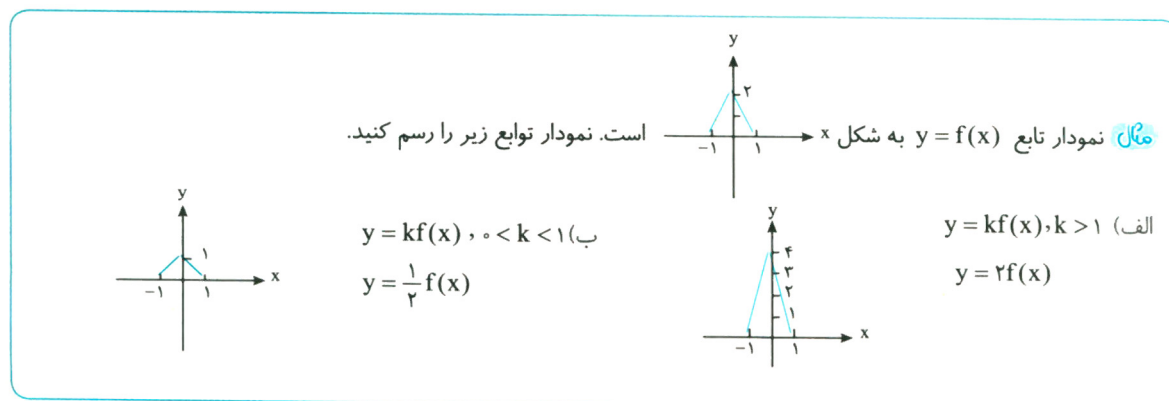
برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافیه نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت پایین انجام شود.



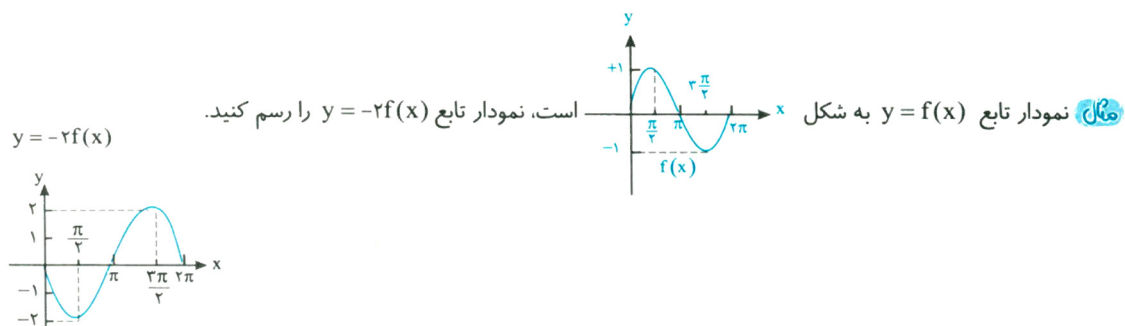
برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ اگر $k > 0$ باشد، کافیه نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، کافیه نمودار این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام شود.



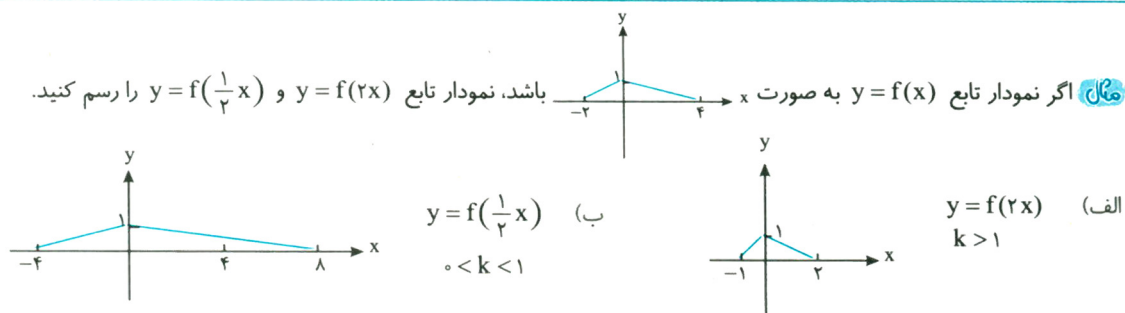
برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در مثال‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آید؛ بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

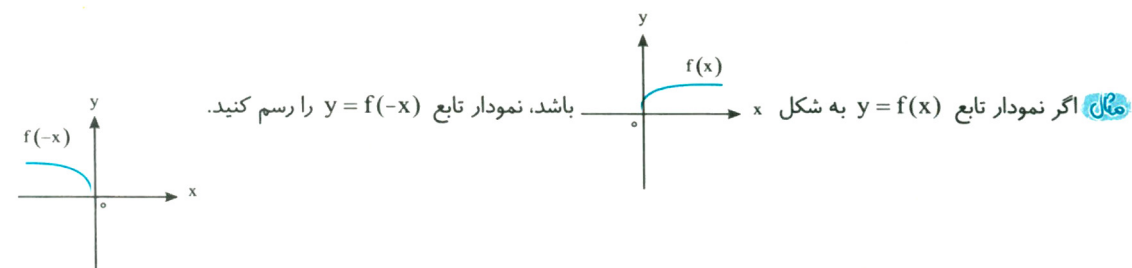


برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، $k > 0$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.



نکته با توجه به شکل‌های بالا ملاحظه می‌شود، اگر $|k| > 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x به دست می‌آید و اگر $0 < |k| < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.



تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

هر تابع به شکل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن یک عدد صحیح نامنفی، $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ هستند، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n گویند.

توابع صعودی و توابع نزولی

تابع حقیقی f را در نظر بگیرید، اگر $x_1, x_2 \in D_f$ باشند.

الف) اگر با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع $f(x)$ تابع صعودی می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در مجموعه A صعودی گویند هرگاه در این مجموعه اگر $x_1, x_2 \in A$ ، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



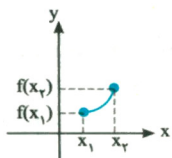
مانند:



ب) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ نیز افزایش یابد، $f(x)$ را تابع صعودی اکید می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در یک مجموعه اکیداً صعودی گویند هرگاه

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

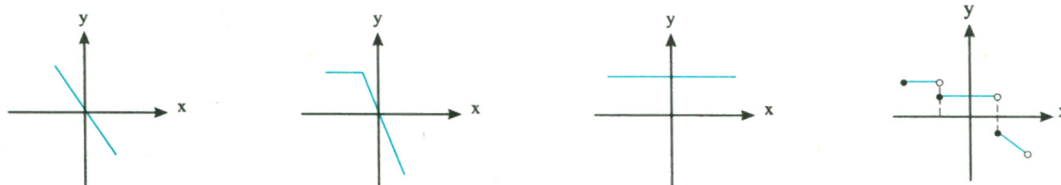
مانند:



ب) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش یابد و یا ثابت بماند، تابع $f(x)$ را تابع نزولی می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در مجموعه A نزولی گویند هرگاه در این مجموعه اگر:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

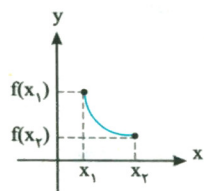
مانند:



ت) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش یابد، تابع $f(x)$ را تابع نزولی اکید گویند یا به عبارت دیگر تابع f را در یک مجموعه اکیداً نزولی گویند هرگاه

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

مانند:

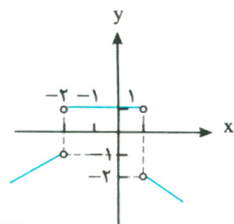


توجه ۱) اگر تابع $f(x)$ در مجموعه A فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، $f(x)$ را در مجموعه A تابع یکنوا گویند.

۲) اگر تابع $f(x)$ در مجموعه A فقط صعودی اکید یا فقط نزولی اکید باشد، تابع $f(x)$ را در مجموعه A تابع یکنوا اکید گویند.

۳) هر تابع صعودی اکید، تابعی صعودی و هر تابع نزولی اکید، تابعی نزولی است و عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست.

مثال نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 \leq x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.



صعودی اکید: $(-\infty, -2)$

ثابت: $(-2, 1)$

نزولی اکید: $(1, +\infty)$

**تقسیم و بخش پذیری**

قضیه تقسیم: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است.

محاسبه باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - a$

اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ صفر باشد، $f(x) = p(x)q(x)$ می‌شود که در این حالت می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

مثال اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی مانده تقسیم آن بر $(x - a)$ برابر $f(a)$ است و آن را با $f(a) = r$ نمایش می‌دهند.

مثال باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ را بر $x - 1$ به دست آورید.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$p(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 2 - 3 + 5 = 4$$

نوع اتحادهای زیر همواره برقرار هستند.

$$1) x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$2) x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$3) x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

$$4) x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - 1)$$

$$5) x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$$

n های فرد

n های زوج

n های فرد

مثال به کمک تجزیه، کسر زیر را ساده کنید.

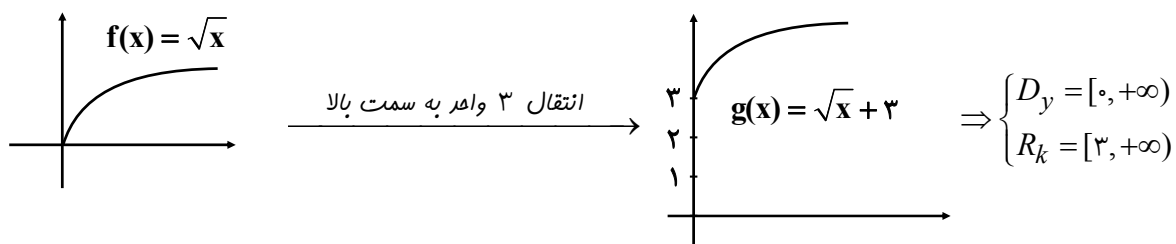
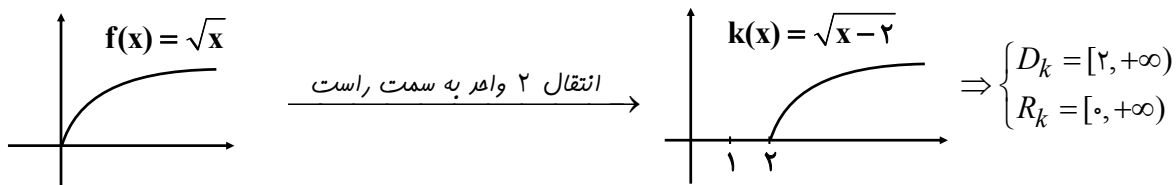
$$\frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$



سوالات مربوط به رسم نمودار

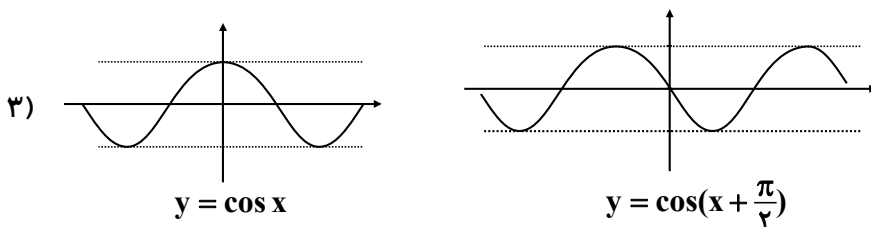
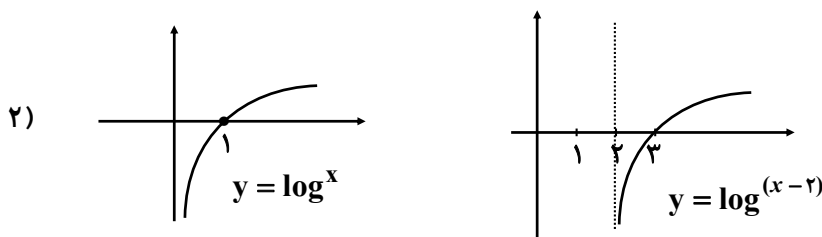
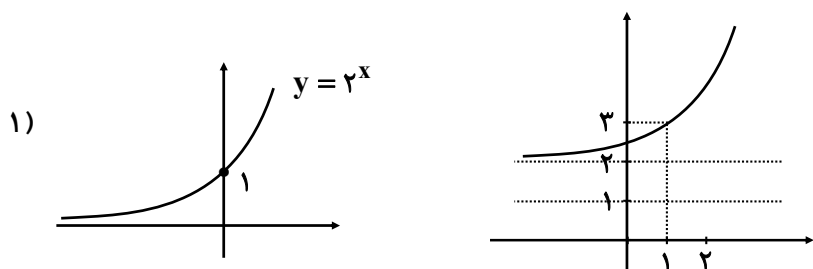
۱- به کمک نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع $k(x) = f(x-2)$ و $g(x) = f(x)+3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

پاسخ:



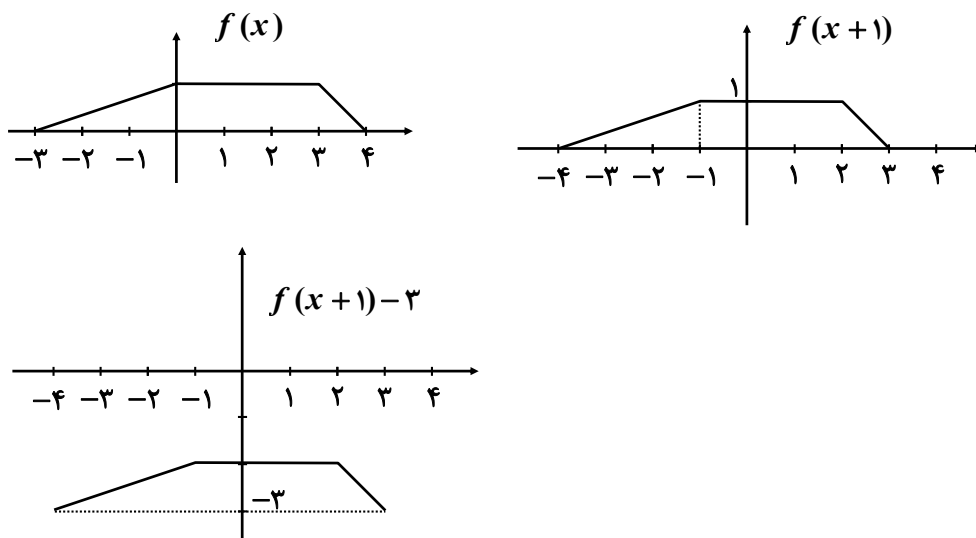
۲- به کمک نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = \log^x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = 2^{x-1} + 2$ و $y = \log^{(x-2)}$ را رسم کنید.

$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.





۳- نمودار توابع f به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال عمودی و افقی، نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ را رسم کنید.



۴- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: حالت اول: $k > 0 \leftarrow$ چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kc, kd]$$

حالت دوم: $k < 0 \leftarrow$ چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a, b], R_f = [kd, kc]$$

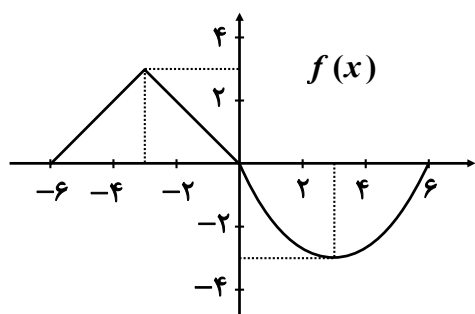
۵- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را تعیین کنید.

پاسخ: چون k فقط در x ضرب شده است پس تاثیری در برد ندارد.

$$I) k > 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right], R_f = [c, d]$$

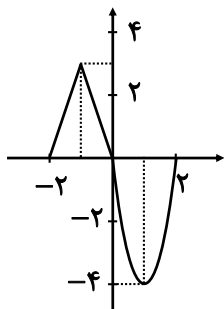
$$II) k < 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{b}{k}, \frac{a}{k}\right], R_f = [c, d]$$

۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشند، نمودار تابع $y = f(3x)$ و $y = f\left(\frac{-x}{2}\right)$ را رسم کنید.

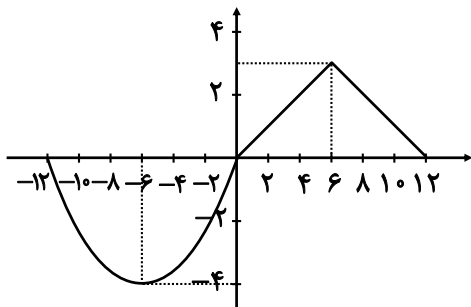




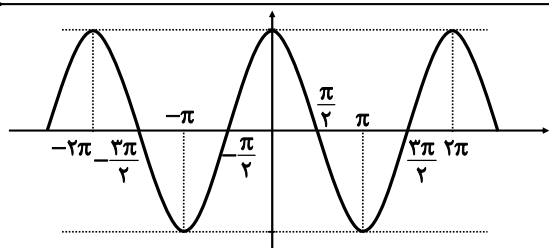
$$y = f(3x)$$



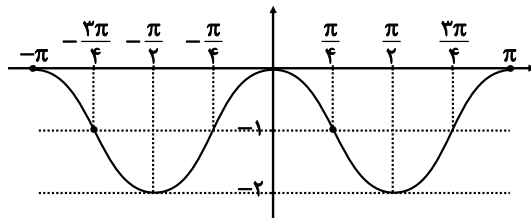
$$y = f\left(\frac{-x}{3}\right)$$



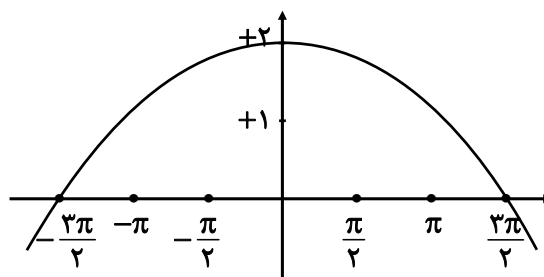
۷- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید:



$$۱) y = \cos 2x - 1$$



$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$





۸- هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{2+x}$ a

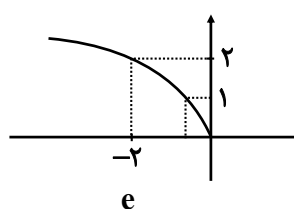
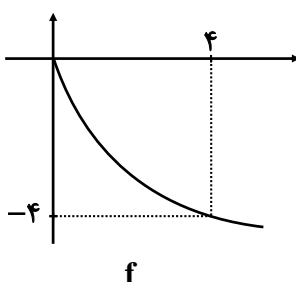
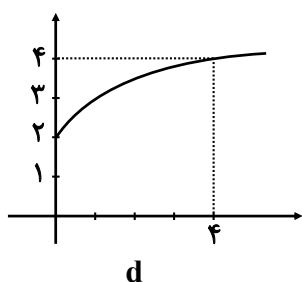
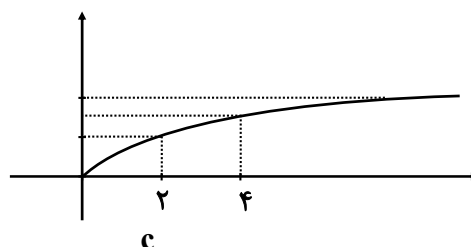
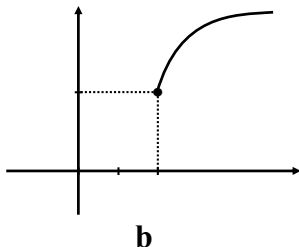
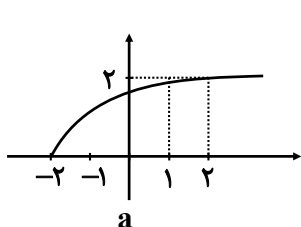
ب) $y = 2 + \sqrt{x}$ d

پ) $y = -2\sqrt{x}$ f

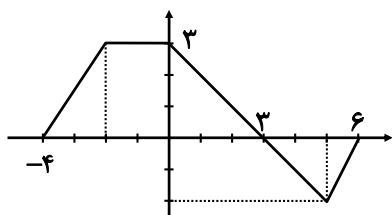
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ c

ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$ b

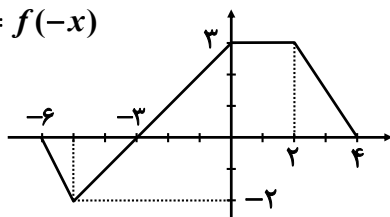
ج) $y = \sqrt{-2x}$ e



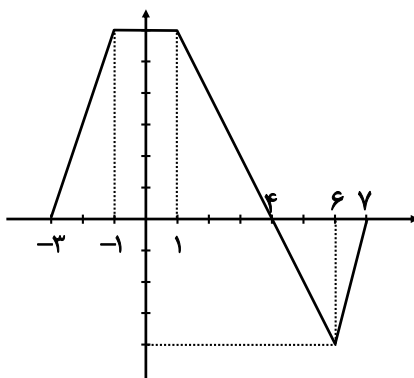
۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



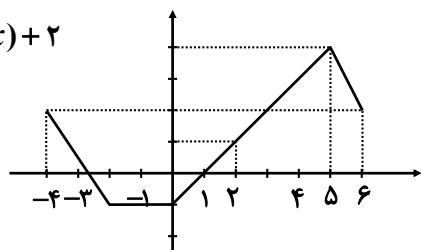
الف) $y = f(-x)$



ب) $y = 2f(x-1)$

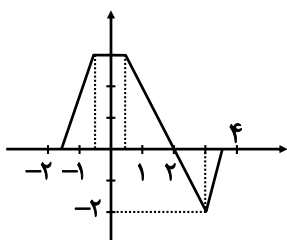


پ) $y = -f(x) + 2$

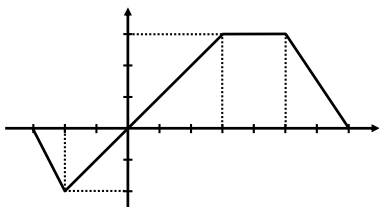




ت) $y = f(2x - 1)$



ث) $y = f(3 - x)$

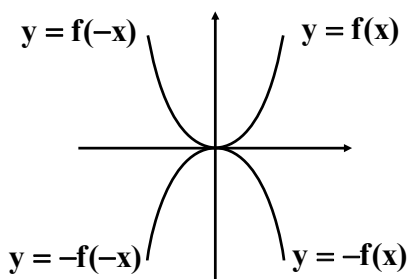


۱۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را به کمک آن رسم کنید.

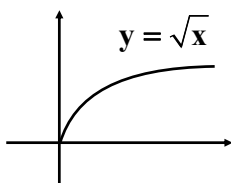
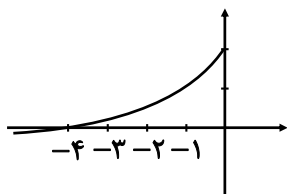
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



۱۱- نمودار تابع مقابل از قرینه یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



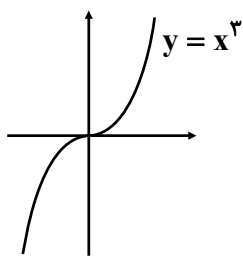
پاسخ: می‌دانیم نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:

حال برای رسیدن به نمودار تابع داده شده باید نمودار تابع $g = \sqrt{x}$ را نسبت به محورهای x و y قرینه و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$$-f(-x) + 2 = -\sqrt{-x} + 2 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{-x}$$

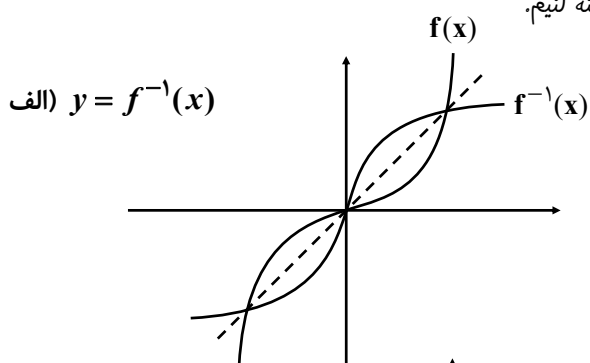


سوالات مربوط به تابع درجه سوم

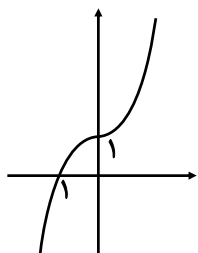


۱- به کمک نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودارهای زیر را رسم کنید:

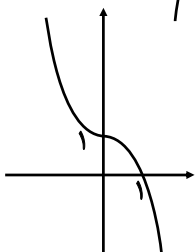
پاسخ: برای رسم تابع وارون، کافی است نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



ب) $y = (x+1)^3$



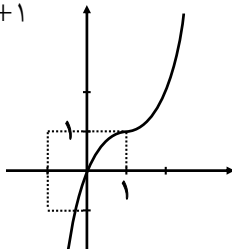
پ) $y = -x^3 + 1$



ت) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

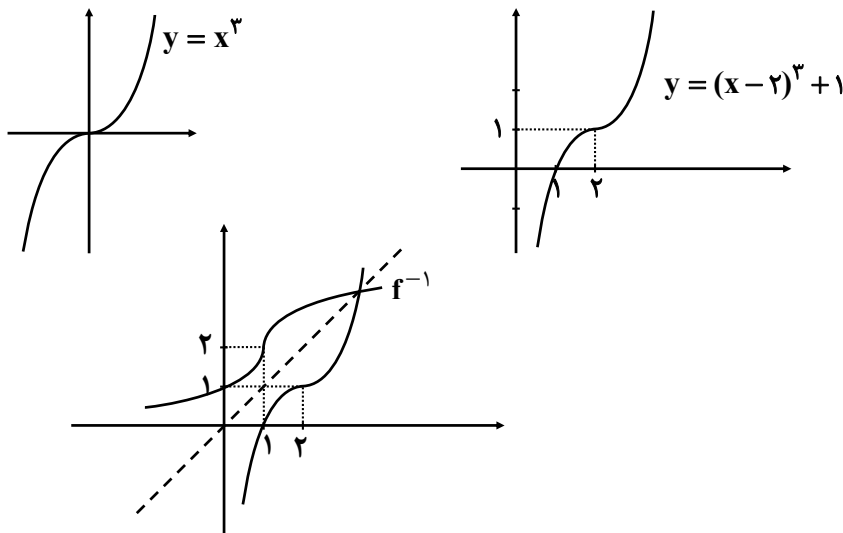
پاسخ: برای رسم این تابع می‌توانیم ابتدا عدد ۱ را اضافه و کم کنیم تا بتوانیم اتحاد مکعب تشکیل دهیم.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$$





۲- الف) نمودار تابع $y = (x-2)^3 + 1$ را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنید.
ب) نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم و سپس ضابطه‌ی آنرا بیابید.



$$y = (x-2)^3 + 1 \rightarrow x = (y-2)^3 + 1 \rightarrow (y-2)^3 = x-1$$

$$\Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

سوالات مربوط به توابع صعودی و نزولی

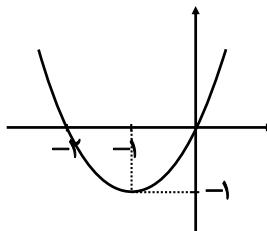
۱- نمودار توابع $y = x^2 + 2x$ و $y = 2^{-x}$ و $y = |x+2|$ را رسم کنید و مشخص کنید این توابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند.

الف) $y = x^2 + 2x$ عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم $\rightarrow$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

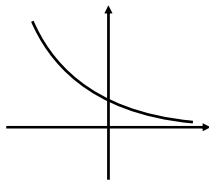
اکیداً نزولی $\rightarrow (-\infty, -1]$

اکیداً صعودی $\rightarrow [-1, +\infty)$



ب) $y = 2^{-x}$

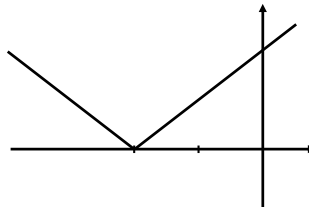
اکیداً نزولی $\rightarrow (-\infty, +\infty)$



پ) $y = |x+2|$

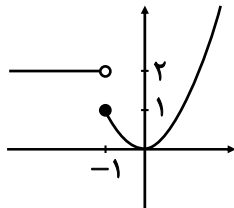
اکیداً نزولی $\rightarrow (-\infty, -2]$

اکیداً صعودی $\rightarrow [-2, +\infty)$





۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



$(-\infty, 0] \rightarrow$ نزولی

$[0, +\infty) \rightarrow$ صعودی

۳- فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشد. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.

پاسخ: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a > b$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ می‌باشد و از طرفی چون تابع اکیداً صعودی است پس این نتیجه خلاف فرض است.

۴- اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را بدست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است داریم:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

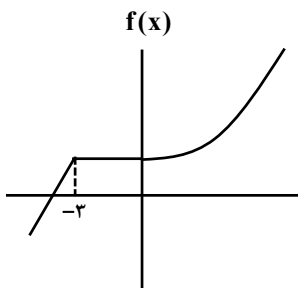
۵- فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید که $a \geq b$.

پاسخ: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $b > a$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ شود که این نتیجه خلاف فرض است.

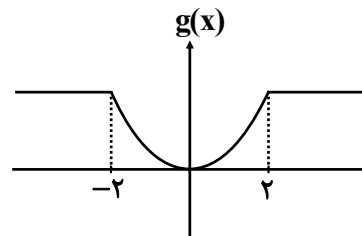
۶- اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود x را بدست آورید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow[\text{تابع نزولی است و داریم}]{\text{چون مبنای بین صفر تا یک است}} 6 \geq 3x-2 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3}$$

۷- نمودارهای توابع f و g در زیر رسم شده‌اند مشخص کنید تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی و تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



$$\begin{cases} x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow \text{صعودی} \end{cases}$$

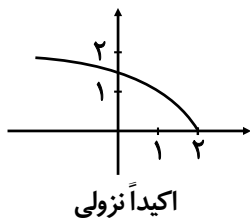


$$\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \rightarrow \text{نزولی} \\ x \in [-2, 0] \rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

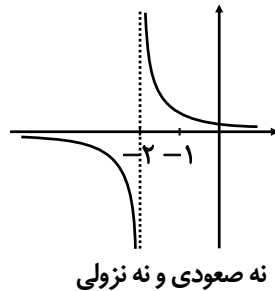


۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در دامنه خود، اکیداً یکنوا هستند؟

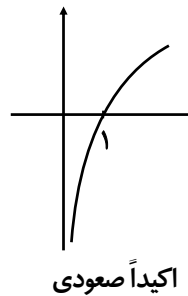
الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$



ب) $g(x) = \frac{1}{x+2}$



ج) $h(x) = \log_2^x$



سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + x - 1$ بر $2x + 1$ را بدست آورید:

پاسخ: برای بدست آوردن باقی مانده کافی است ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{باقی مانده } R(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-13}{8}$$

۲- اگر چند جمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است، پس باقی مانده برابر صفر می باشد.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$R(x) = a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

پاسخ: اگر مقسوم را برابر $f(x)$ در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow (2)^3 + k(2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow 4k = -4 \rightarrow k = -1$$

۴- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} \text{ پاسخ: چون مقسوم بر } x - 2 \text{ و } x + 1 \text{ بخش پذیر است، پس:}$$

$$f(2) = (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$4a + 2b = -9 \xrightarrow{a=b} 4b + 2b = -9 \rightarrow 6b = -9 \rightarrow b = -\frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵- چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحادها باز کنید.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$



۶- عبارت $x^5 + 1$ را بر حسب $(x+1)$ تجزیه کنید:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۷- هر یک از چندجمله‌های زیر را بر حسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید:

الف) $x^6 - 1$ بر حسب $x-1$

$$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب) $x^6 - 1$ بر حسب $x+1$

$$(x^6 - 1) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

پ) $x^5 + 32$ بر حسب $x+2$

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$



تابع متناوب: تابع f در $\mathbb{R}$ با دامنه D_f را یک تابع متناوب گویند، هرگاه عدد مثبتی مانند $T \neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$۱) \forall x \in D_f : (x + T) \in D_f$$

$$۲) \forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$$

کوچکترین T را دوره تناوب تابع می گویند.

$$۱) D_f = \mathbb{R}, x \in D_f \Rightarrow (x + 2\pi) \in D_f$$

مثال ثابت کنید $f(x) = \sin x$ دارای دوره تناوب $T = 2\pi$ می باشد.

$$۲) f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

بین دوره ها متناوب $f(x)$ (مثلاً $4\pi, 6\pi, \dots$) از همه کوچکتر است. پس تابع فوق متناوب بوده و دوره تناوب آن $T = 2\pi$ است.

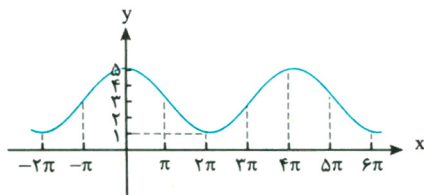
نکته توابع به شکل $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$-|a| + c \leq a \sin bx + c \leq |a| + c$$

$$-|a| + c \leq a \cos bx + c \leq |a| + c$$



مثال نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطه آن را مشخص کنید.



با توجه به شکل، ماکزیمم این تابع برابر ۵ و مینیمم آن برابر ۱ است، پس:

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2|a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

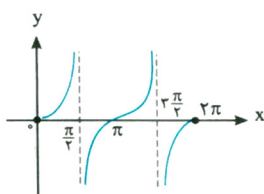
$$|a| + c = 5 \Rightarrow 2 + c = 5 \Rightarrow c = 3$$

با توجه به تأثیری که منفی بودن a بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محور x ها دارد، باید a مثبت باشد.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow 2\pi = 4\pi |b| \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = +\frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3 = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

توجه دارید که برای $\cos$ منفی بودن یا مثبت بودن b تأثیری ندارد.



نوع در مورد تابع $y = \tan x$ ، با توجه به نمودار آن، در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ تابعی صعودی است.

اتحادهای مثلثاتی

$$۱) \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$۳) \cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$

$$۵) \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$۷) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$۹) \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$۱۱) \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$۱۳) \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

$$۱۵) \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$۱۷) \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

$$۱۹) \sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$۲۱) \tan(\pi + a) = \tan a$$

$$۲۳) \sin(\pi - a) = \sin a$$

$$۲) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$۴) \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$۶) \sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$۸) \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

$$۱۰) \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$۱۲) \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$۱۴) \cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$$

$$۱۶) \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$۱۸) \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$$

$$۲۰) \cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$۲۲) \cot(\pi + a) = \cot a$$

$$۲۴) \cos(\pi - a) = -\cos a$$



$$۲۵) \tan(\pi - a) = -\tan a$$

$$۲۷) \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$۲۹) \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$۳۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۳۳) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۳۵) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۳۷) \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$۳۹) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$۴۱) \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$۴۳) \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$۴۵) \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$۴۷) \tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$$

$$۴۹) \cot A - \cot B = \frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B}$$

$$۵۱) \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1 + \cot a}{\cot a - 1}$$

$$۵۳) 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$۲۶) \cot(\pi - a) = -\cot a$$

$$۲۸) \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$۳۰) \cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$۳۲) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۳۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$۳۶) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۳۸) \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$۴۰) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$۴۲) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$۴۴) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$۴۶) \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

$$۴۸) \cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$$

$$۵۰) \cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{\cot a - 1}{\cot a + 1}$$

$$۵۲) 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

حل معادلات مثلثاتی

الف) جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت مقابل است:

ب) جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل است:

پ) جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت مقابل است:

ت) جواب‌های کلی معادله $\cot x = \cot \alpha$ به صورت مقابل است:

ث) حالت‌های خاص:

$$۱) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$۲) \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$۳) \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$۴) \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$۵) \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$۶) \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$



مثال معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$۱) \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$۲) \cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{+1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$۳) \tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{-\pi + 3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$۴) \sin 2x = \tan x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x - \sin x = 0$$

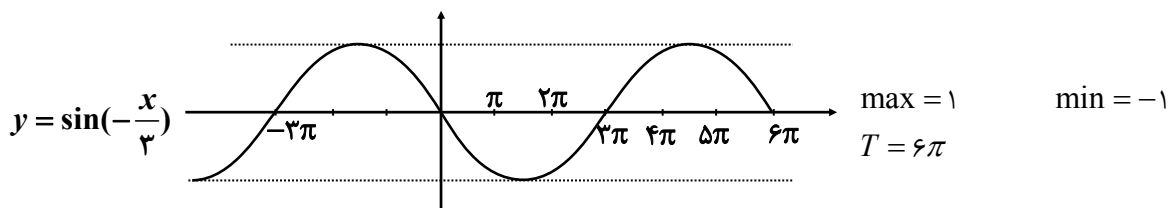
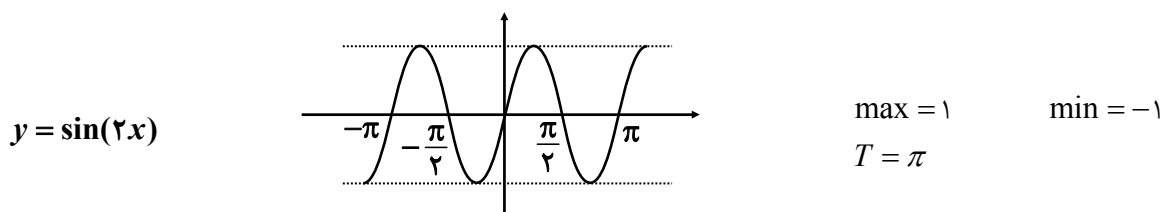
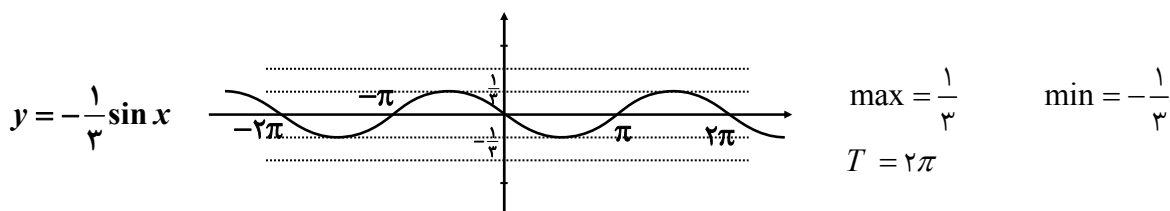
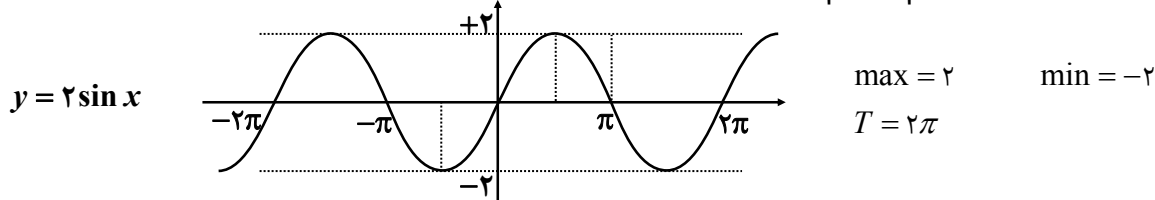
$$\Rightarrow \sin x (2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x (\cos 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



سوالات مربوط به دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم و تانژانت

فصل دوم

۱- در نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب را مشخص کنید:



۲- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

max = $|3| - 2 = 1$

min = $-|3| - 2 = -5$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

max = $|\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

min = $-|\frac{1}{4}| = -\frac{1}{4}$

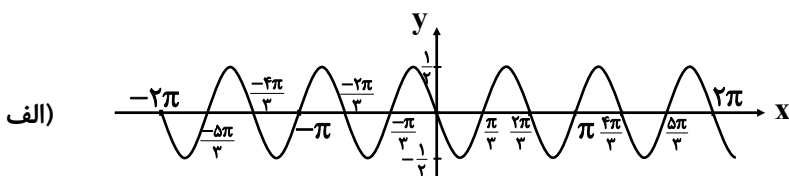
$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

max = $|\pi| + 1 = \pi + 1$

min = $-|\pi| + 1 = 1 - \pi$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

۳- هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ای $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.



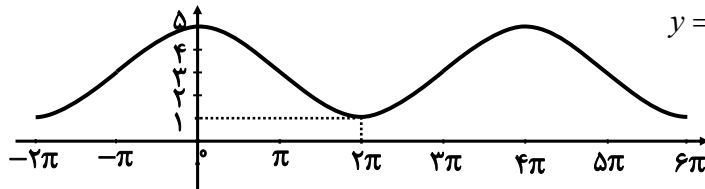
با توجه به نمودار ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y = a \sin bx + c$$

و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ بدست می‌آید که در آن علامت a منفی و

علامت b مثبت است. بنابراین داریم: $y = -\frac{1}{3} \sin 3x$

ب)



با توجه به نمودار، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و ماکزیمم و مینیمم آن برابر 5 و 1 و طول دوره‌ی

تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ و $a = 2$ لذا $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

۴- دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

$$\frac{y = a \sin bx + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|}}{\max = |a| + c, \min = -|a| + c} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|7|} = \frac{2\pi}{7} \quad \max = |2| + 1 = 3 \quad \min = -|2| + 1 = -1$$

ب) $\sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

$$\frac{y = a \cos bx + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|}}{\max = |a| + c, \min = -|a| + c} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4 \quad \max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \quad \min = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

پ) $-\pi \sin(\frac{x}{2}) - 2$

$$\frac{y = a \sin bx + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|}}{\max = |a| + c, \min = -|a| + c} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi \quad \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \quad \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

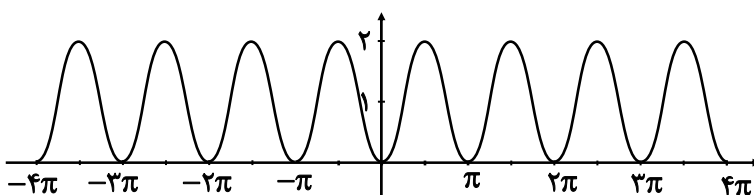
ت) $-\frac{3}{4} \cos 3x$

$$\frac{y = a \cos bx + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|}}{\max = |a| + c, \min = -|a| + c} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi \quad \max = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4} \quad \min = -|-\frac{3}{4}| = -\frac{3}{4}$$

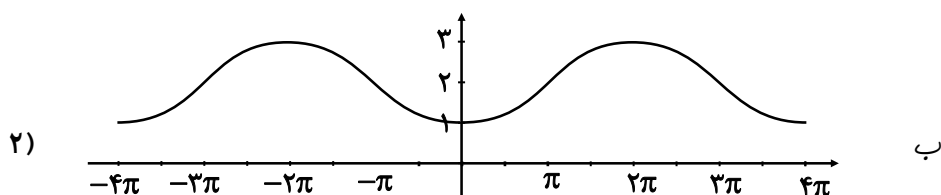
۵- هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$

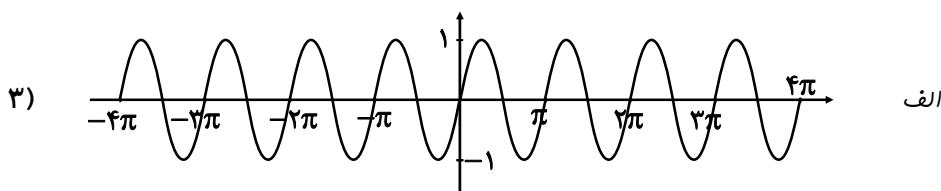
۱)



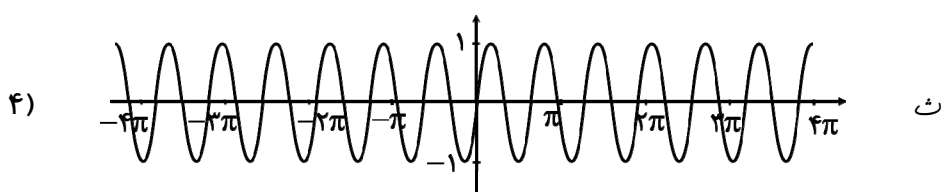
ت



ب



الف



ث

۶- در هر مورد ضابطه‌ی تابع مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید:

الف) $T = \pi, \max = 3, \min = -3$

$$y = a \sin bx + c, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$a = \frac{3 - (-3)}{2} = 3 \quad c = \frac{3 + (-3)}{2} = 0 \quad \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 3 \sin 2x$$

ب) $T = 3, \max = 9, \min = 3$

$$y = a \sin bx + c, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$a = \frac{9 - 3}{2} = 3 \quad c = \frac{9 + 3}{2} = 6 \quad 3 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow y = 3 \sin \frac{2\pi}{3}x + 6$$

پ) $T = 4\pi, \max = -1, \min = -7$

$$y = a \sin bx + c, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

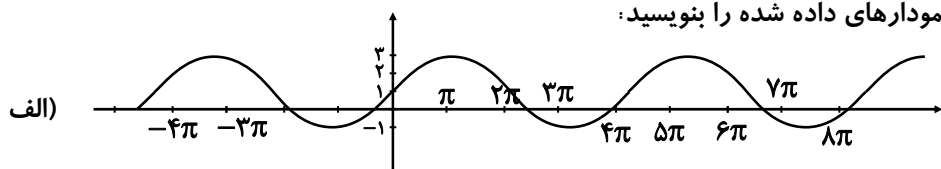
$$a = \frac{-1 - (-7)}{2} = 3 \quad c = \frac{-1 + (-7)}{2} = -4 \quad 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$$

ت) $T = \frac{\pi}{2}, \max = 1, \min = -1$

$$y = a \sin bx + c, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$a = \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \quad c = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = \sin(4x)$$

۷- ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید:

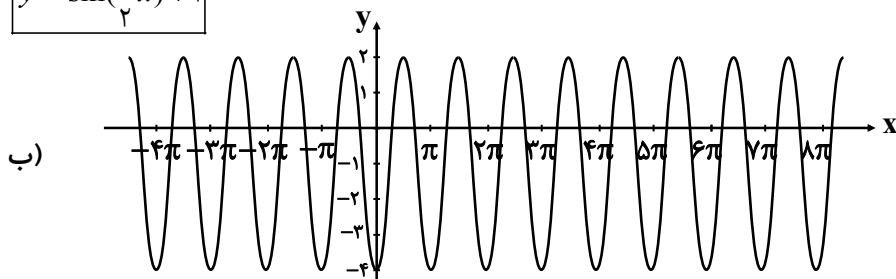




$$\max = 3, \min = -1, T = 4\pi$$

$$C = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, a = \frac{3 - (-1)}{2} = 2, |b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

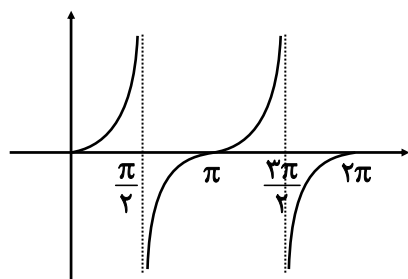


$$\max = 2, \min = -4, T = \pi$$

$$C = \frac{2 + (-4)}{2} = -1, a = \frac{2 - (-4)}{2} = 3, |b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y = 3\cos(2x) - 1$$

۸- صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.



تابع در دامنه‌ی خود همواره صعودی است.

۹- کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. *نادرست*

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. *نادرست*

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. *نادرست*

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. *درست*

۱۰- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را باهم مقایسه کنید.

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	$+\infty$



ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

سوالات مربوط به نسبت‌های مثلثاتی 2α

۱- مقدار $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \times \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \times \cos 15^\circ \rightarrow \cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

۲- فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \xrightarrow{\alpha \text{ زاویه اول}} \sin \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

۳- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 (22/5^\circ) \Rightarrow \sin^2 (22/5^\circ) = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 (22/5^\circ) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin (22/5^\circ) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos 45^\circ = 2\cos^2 (22/5^\circ) - 1$$

$$\rightarrow \cos^2 (22/5^\circ) = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos (22/5^\circ) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$



سوالات مربوط به معادلات مثلثاتی

تیپ اول سینوس ها:

۱- معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $4\sin x + \sqrt{11} = 0$

$$4\sin x + \sqrt{11} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{11}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳- معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

$$\sin 2x = \sin 3x$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴- معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$



۵- جواب معادله $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را بدست آورید.

ابتدا طرفین معادله را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2 \sin x \cdot \cos x = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 2x$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ب) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پ) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$\xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \end{cases}$$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = t}$$



$$t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-\frac{3}{4}) = 4 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

ث) $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

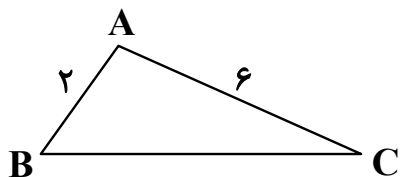
۷- یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16 \frac{m}{s}$ برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ V (برحسب ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{V^2 \sin 2\theta}{10}$$

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

۸- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \hat{A} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \hat{A} = \sin \frac{\pi}{6}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ \hat{A} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فقط می توان $A = \frac{\pi}{2}$ و $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$ را در نظر گرفت پس دو مثلث می توان سافت.

تیپ دوم کسینوس ها:

۱- معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید:

$$\cos x (2 \cos x - 9) = 5 \rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = t}$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \rightarrow (2t + 1)(t - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -5 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۲- معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید. (ویژه ریاضی)

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow \sin x = 1 - \cos x \xrightarrow{\text{توان}} \sin^2 x = (1 - \cos x)^2$$

$$\rightarrow \sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2\cos x (\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0, 2\pi \end{cases}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$



تیپ سوم تانژانت (ویژه رشته ریاضی)

۱- معادله $\tan x = \tan \Delta x$ را حل کنید:

$$x = k\pi + \Delta x \rightarrow x = \frac{k\pi}{\Delta} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\tan(2x - 1) = 0$

$$\tan(2x - 1) = \tan(0) \Rightarrow 2x - 1 = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi + 1}{2}$$

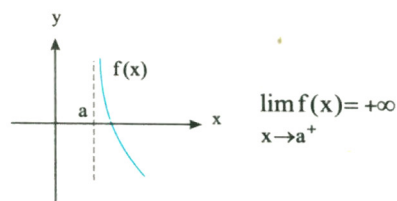
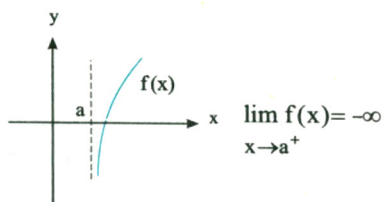
ب) $\tan 3x = \tan \pi x$

$$3x = k\pi + \pi x \Rightarrow 3x - \pi x = k\pi \rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3 - \pi}$$

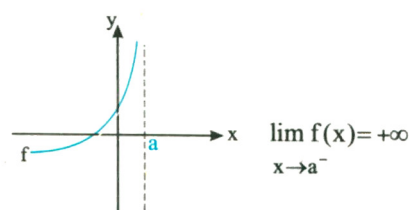
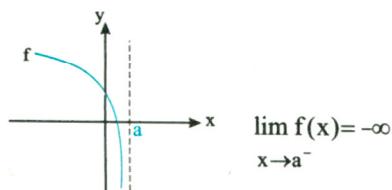


حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی، بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



هم‌چنین فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه، از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

قضیه (۱): اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج باشد } n \\ -\infty & \text{فرد باشد } n \end{cases}$

قضیه (۲):

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن‌گاه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن‌گاه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

قضیه (۳): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

الف) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

پ) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ت) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه:

نکته قضیه (۳) در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال حدود زیر را حساب کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2^+}{(-2)^++2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[2^-]-2}{2^- - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

قضیه (۴): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\pm\infty} = 0$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

زیرا:



قضیه (۵): اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ آن گاه: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$

پ) اگر $L < 0$ آن گاه: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = -\infty$

نکته قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \times \frac{x+1}{x} = 1 \times (+\infty) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \frac{1}{x-1} = 2 \times (-\infty) = -\infty$

مجانِب قائم: خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

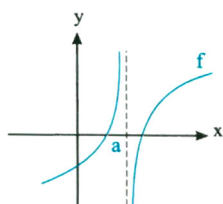
الف) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

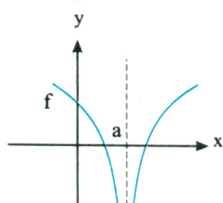
ت) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

نکته در شکل‌های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم تابع است.



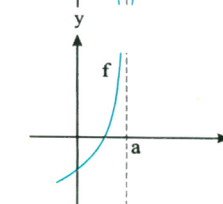
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

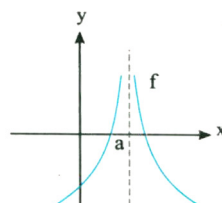


$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

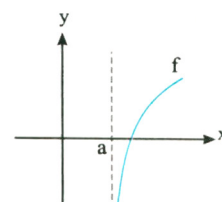


$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

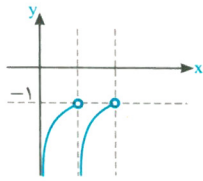
نکته مجانب‌های قائم در توابع کسری اغلب در ریشه مخرج اتفاق می‌افتند پس برای پیدا کردن آن‌ها کافی است ریشه‌های مخرج را

بیابیم و سپس آن‌ها را بررسی نماییم.



$$f(x) = \frac{1}{-x + [x]} = \frac{1}{-(x - [x])}$$

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{-x + [x]}$ در مجاورت مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



چون ریشه‌های مخرج اعداد صحیح هستند، حول نقطه $x = a$ رفتار تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{[x] - x} = \frac{1}{a - a^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

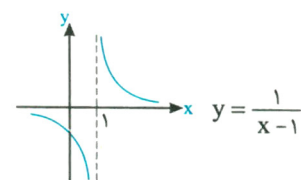
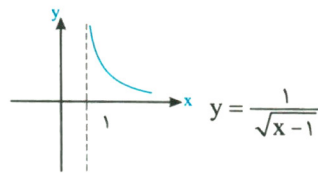
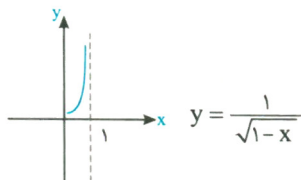
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{[x] - x} = \frac{1}{[a^-] - a} = \frac{1}{(a-1) - a} = -1$$

مجاانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

پس دو خط $x = -2$ و $x = 3$ مجانب قائم تابع هستند.

در توابع زیر خط $x = 1$ مجانب قائم است و نمودار توابع در مجاورت مجانب قائم به شکل‌های زیر است:



در توابع زیر خط $x = 1$ مجانب قائم نیست، چرا؟

$$1) y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$$

$$2) y = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$3) y = \frac{1}{[x-1]}$$

$$4) y = \frac{\left[\frac{x}{2}\right]}{x-1}$$

۱) زیرا 1^+ و 1^- هیچکدام در دامنه نیستند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = (1+1) = 2 \neq \infty$$

$$2) \text{ در تابع } y = \frac{x^2-1}{x-1}$$

و بنابراین خط $x = 1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد.

۳) زیرا در $x = 1^+$ مخرج کسر صفر مطلق می‌شود و تعریف نشده است و از سمت چپ حد یک عدد حقیقی است.

۴) زیرا در همسایگی محذوف $x = 1$ حاصل $\left[\frac{x}{2}\right]$ برابر صفر مطلق است و حد تابع ∞ نمی‌شود.

به ازای چه مقدار از m تابع $y = \frac{x^2+4x+3}{x^2+mx+4}$ فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت اول: اگر ریشه مخرج مضاعف باشد، فقط یک مجانب قائم دارد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4$$

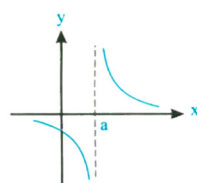
حالت دوم: صورت و مخرج، ریشه مشترک داشته باشند، در این صورت پس از ساده کردن، مخرج فقط یک ریشه دارد.

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2+mx+4} \Rightarrow \begin{cases} \text{جای گذاری در مخرج} \rightarrow 1-m+4=0 \Rightarrow m=5 \\ \text{جای گذاری در مخرج} \rightarrow 9-3m+4=0 \Rightarrow m=\frac{13}{3} \end{cases}$$

توجه کنید که در حالت دوم حواسمان باشد که ریشه دیگر مخرج -3 نباشد!

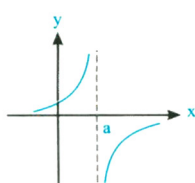


نویس به طور کلی، نمودار یک تابع در مجاورت مجانب قائم آن به یکی از صورت‌های زیر است:



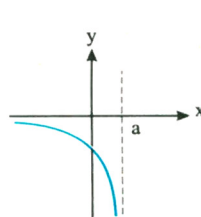
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

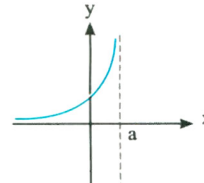


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

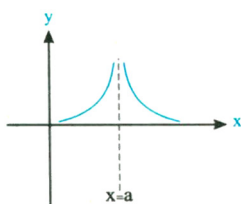
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



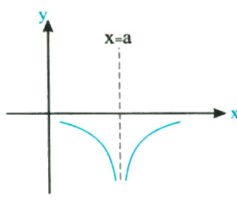
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



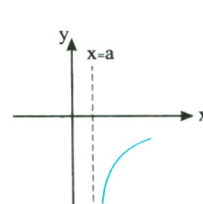
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



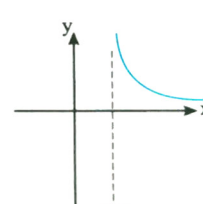
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



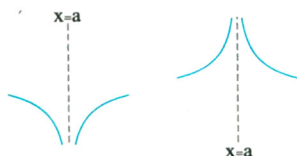
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



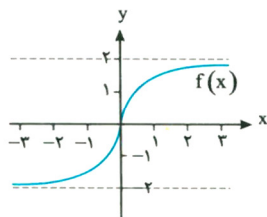
اگر نمودار تابع گویای $f(x)$ در مجاورت مجانب قائم خود $(x=a)$ به یکی از صورت‌های زیر باشد، آن‌گاه $x=a$ ریشه مضاعف مخرج است و $x=a$ دیگر ریشه صورت نیست.

حد در بی‌نهایت

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ هرگاه بتوان با اختیار x ‌های به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

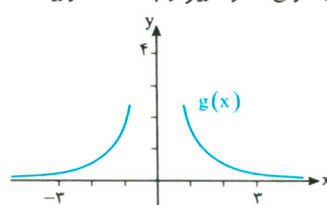
اگر تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ هرگاه بتوان با اختیار x ‌های به قدر کافی کوچک، فاصله $f(x)$ را از L به هر اندازه کوچک کرد.

مثال با استفاده از نمودارهای f و g حدود زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

نویس به طور کلی حد در بی‌نهایت هر چند جمله‌ای مانند $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر حد جمله با بزرگ‌ترین درجه آن است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

قضیه (۶): اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد:

قضیه (۷): اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 L_2$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

تذکره: توجه داشته باشید که قضیه فوق وقتی $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار می‌باشد.

قضیه (۸): اگر n عدد طبیعی باشد.

الف) اگر n عدد زوج باشد: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$
 ب) اگر n فرد باشد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

قضیه (۹): اگر L عددی حقیقی، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty, & L > 0 \\ -\infty, & L < 0 \end{cases}$$

تذکره: قضیه فوق در حالتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty, & L > 0 \\ +\infty, & L < 0 \end{cases}$$

قضیه (۱۰): اگر L عددی حقیقی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty, & L > 0 \\ -\infty, & L < 0 \end{cases}$$

تذکره: قضیه فوق در حالتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ باز هم برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty, & L > 0 \\ +\infty, & L < 0 \end{cases}$$

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

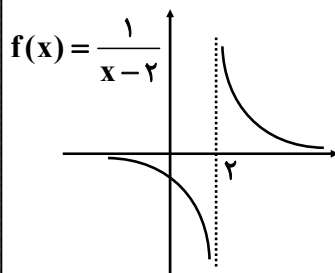
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

مجاانب افقی: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم، به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

برقرار باشد.

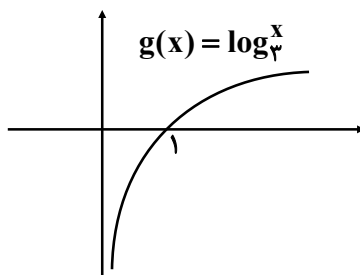


۱- نمودار توابع f و g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند، با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود بیابید.

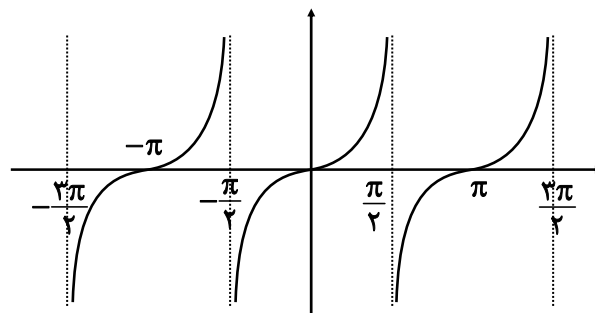


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

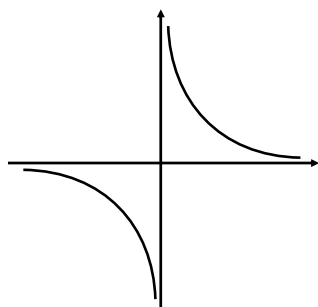


$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} h(x) = -\infty$$

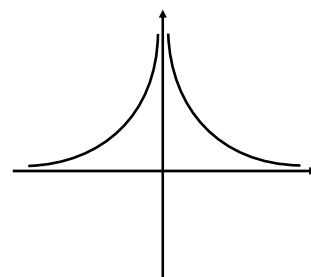
$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (3\pi/2)^+} h(x) = -\infty$$

۲- با استفاده از نمودار توابع داده شده حدود زیر را بدست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

۳- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

در نامیه اول قرار می‌گیرد و $\sin x > 0$

$$۲) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2}{0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2^-]-2}{0^-} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

ابتدا جزء صیغ را به عدد تبدیل کن $[2^-] = 1$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



۴- توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1 \end{cases}$$

ب) تابع $f + g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2} + (x + 1) = \frac{1 + x^3 + x^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

پ) تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x^2} \times (x + 1) = \frac{x + 1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 1}{x^2} \right) = \frac{1}{(0)^2} = +\infty$$

۵- حاصل حدهای زیر را بدست آورید و مشخص کنید در هر مرحله از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1 + 1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty \Rightarrow$ قضیه ۵

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\cancel{x + 2}}{(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{(x + 2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{2 - (1)}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ قضیه ۳

۶- با استفاده از قضایای حد نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x^2} = +\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \left| \frac{5 - x}{2 + x} \right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|5 - x|}{|2 + x|}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)} |5 - x| = |5 - (-2)| = 7 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)} |2 + x| = 0^+ \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|5 - x|}{|2 + x|} = +\infty$$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2} (1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0^+$

$\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$



۷- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{\underbrace{(x-3)}_{0^-} (x+4)} = \frac{14}{0^-} = -\infty$

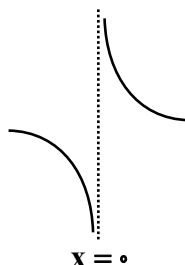
پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-(9^+)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

سوالات مربوط به مجانب قائم

۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

برای یافتن میانج قائم می توانیم ریشه های مخرج را بدست آوریم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

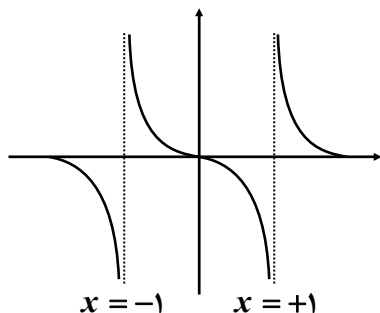
۲- مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود بدست آورید.

ابتدا ریشه های مخرج را بدست می آوریم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

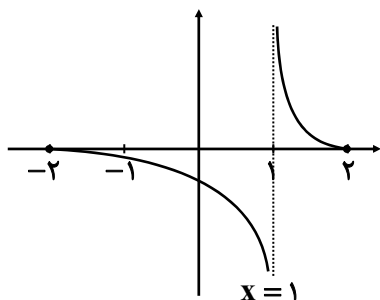
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{9-9+2}{9-3-6} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ میانج قائم است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{4+6+2}{4+2-6} = \frac{12}{0} = \infty \Rightarrow x = -2 \text{ میانج قائم است.}$$

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه $\{-2, 2\}$ ، $[2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x} \Rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0} = \infty$

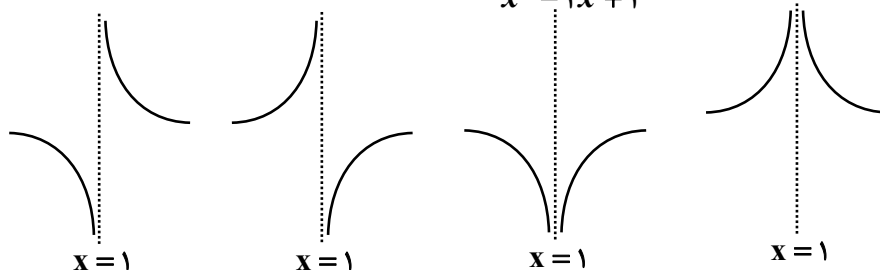
ب) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} \Rightarrow x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = -1 \Rightarrow x=0$ مجانب قائم نیست.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x=1$ مجانب قائم است.

۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟

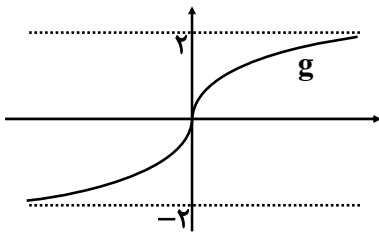


$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

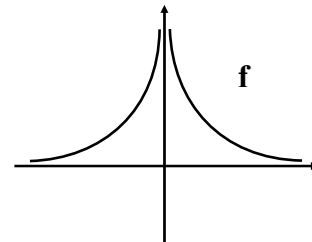


سوالات مربوط به حد در بی نهایت

۱- با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را بدست آورید.

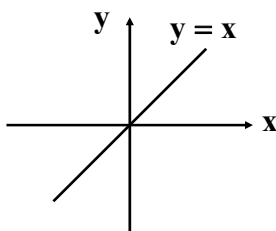
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$

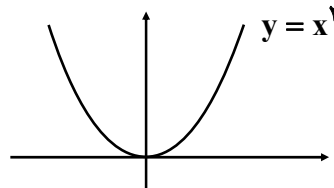


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

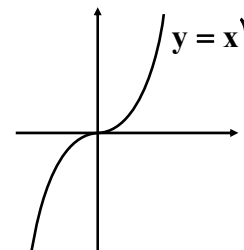
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

۲- مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ را بیان کنید. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ یعنی با کاهش مقدار x از هر عدد دلفواهی، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلفواه مثبتی بزرگتر می شود. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ یعنی با کاهش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلفواه منفی، کوچکتر می شود.۳- با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$ و $y = x^3$ حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

۴- با استفاده از قضیه ۷ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^3} \right) = 3 + 0 = 3$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4)} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

۵- الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



ب) در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حدهای قسمت قبل به چه صورتی نوشته می‌شود؟

$$m > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{a_m}$$

$$n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$$

۶- مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: هر چه مقادیر x بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$: هر چه مقادیر x کوچک و کوچکتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۷- برای تابع f که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید.

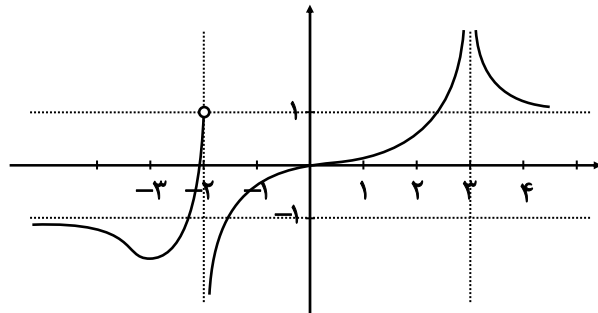
۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$

۲) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

۳) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

۴) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

۵) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$



۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2}x = \pm\infty$

۲) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x + 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

۳) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$

۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

۵) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 2t^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} = 1$

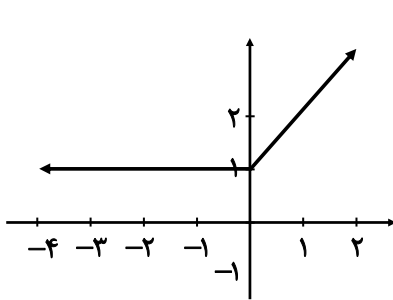
۶) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x) = \mp\infty$

۷) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$

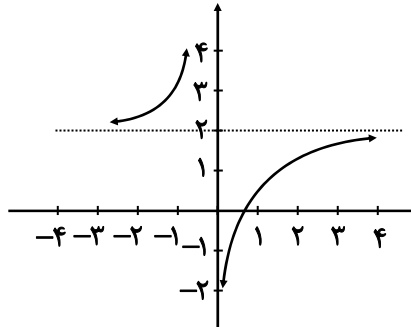


سوالات مربوط به مجانب افقی

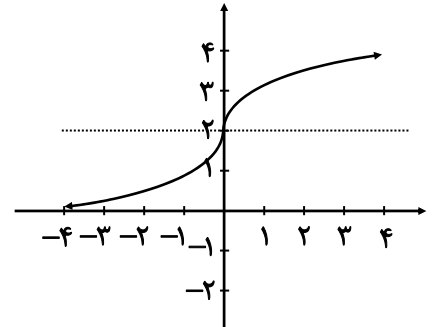
۱- کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی است؟ آن را مشخص کنید.



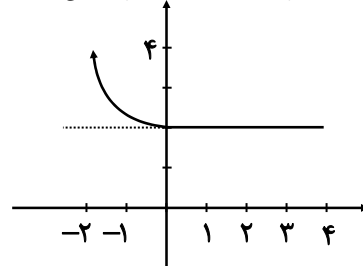
ب) مجانب افقی ندارد



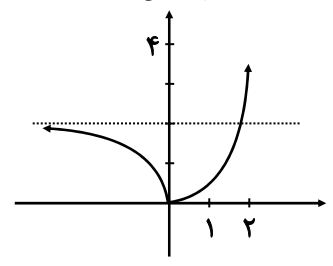
ب) $y = 2$ مجانب افقی



الف) مجانب افقی ندارد



ث) مجانب افقی ندارد



ت) $y = 2$ مجانب افقی دارد

۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب) $g(x) = x^r \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^r = \pm\infty$ مجانب افقی ندارد.

پ) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \pm\infty$ مجانب افقی ندارد.

۳- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=3 \\ \text{مجانب افقی } y=2 \end{cases}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=2 \rightarrow x=-2 \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=1, x=-1 \\ \text{مجانب افقی } y=-2 \end{cases}$

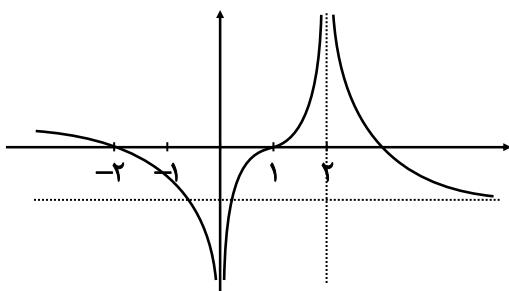
ت) $y = \frac{2x}{1+x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد} \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

۴- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

الف) $f(-1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.





شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حاصل حد بالا را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با یک نامگذاری مناسب می‌توان فرمول فوق را به صورت مقابل نوشت:

به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال (۱) ثابت کنید:

$$a+h=x \Rightarrow h=x-a \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در $x = -2$ بنویسید.

$$m(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 3 - (a^2 + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 3 - a^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + 0 = 2a \Rightarrow m = 2(-2) = -4$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad A \begin{vmatrix} -2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$y - 7 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 1$$

مشتق پذیری و پیوستگی

تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است، هرگاه، یکی از دو تعریف زیر دارای حد متناهی باشند:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

قضیه (۱۱): اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

مثال (۱) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را به ترتیب با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



نتیجه: اگر تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ یعنی حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشیم، در این صورت خط $x = a$ را مماس قائم بر منحنی $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم، بدیهی است که $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

نکته: تابع $f(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر نیست، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $f(x)$ در a پیوسته نباشد.

(۲) $f(x)$ در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

(الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای)

(ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای)

(پ) هر دو نامتناهی باشند.

یادآوری: اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با نماد $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر این که حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن‌ها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

مثال: اگر $f(x) = x^r$ باشد، تابع مشتق و دامنه آن را محاسبه کنید و $f'(r)$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^r - x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^r + r x^{r-1} h + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} h^2 + \dots - x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r x^{r-1} h + \dots}{h} = r x^{r-1}$$

که با توجه به تابع مشتق، دامنه آن برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$$f'(r) = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r - r^r}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{(x-r)(x^{r-1} + x^{r-2}r + \dots + r^{r-1})}{(x-r)} = (r^{r-1} + r^{r-2}r + \dots + r^{r-1}) = 1 \cdot r^{r-1}$$

محاسبه مشتق برخی توابع

۱) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

۳) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۴) $f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}, ax+b > 0$

۵) $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

۶) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

۷) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$) و $f \pm g$ و $f \times g$ ($g(a) \neq 0$) نیز مشتق پذیر هستند.

(الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

(ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

(پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$



مشتق توابع مرکب

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

قاعده زنجیره‌ای

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی بر حسب x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال مشتق تابع $f(x) = \tan^2 x$ را محاسبه کنید.

$$\tan x = u \Rightarrow y = u^2$$

$$y' = 2uu' = 2(1 + \tan^2 x) \tan x$$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع $f(x)$ روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ را با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده و مشتق مرتبه دوم آن را به صورت $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال مشتق مرتبه دوم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1(x^2 - 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^4}$$

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

به طور کلی، آهنگ متوسط تغییر یک تابع در بازه‌ای مانند $(a, a+h)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x = a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

نکته آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق (شیب خط مماس) در آن نقطه متناظرند.

مثال سنگریزه‌ای در آب استخری می‌اندازیم؛ در نتیجه دایره‌هایی به شعاع $r = 5$ ایجاد می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع دایره با آهنگ

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S' = 2\pi r \times r' = 2\pi(5)(\frac{1}{2}) = 5\pi(\frac{1}{2}) = \frac{5\pi}{2}$$

$\frac{1}{2}$ تغییر می‌کند، مساحت دایره با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول (-2) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha, f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7, \quad f(-2+h) = (-2+h)^2 + 3 = 4 - 4h + h^2 + 3 = 7 - 4h + h^2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - 4h + h^2 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 + h)}{h} = -4$$

۲- اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(3) = 9$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad \text{روش دوم: می‌دانیم}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

۳- برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(8)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(8) = -(8)^2 + 10(8) = -64 + 80 = 16$$

$$f'(8) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(8+h)^2 + 10(8+h) - 16}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(64 + h^2 + 16h) + 80 + 10h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -(h+6) = -6$$

روش دوم:

$$f'(8) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-(x-8)(x-2)}{x-8} = -6$$

۴- اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad f(2) = 9 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

$$\begin{cases} (2, 9) \\ m = 10 \end{cases} \Rightarrow y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11 \quad \text{معادله خط مماس}$$



۵- اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

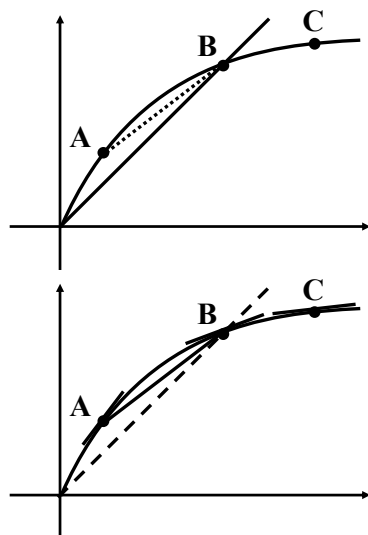
$$f(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A : پاسخ: m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : پاسخ: m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C : پاسخ: m_3

ت) شیب خط AB : پاسخ: m_4

ث) شیب خط $y = 2$: پاسخ: $m_5 = 0$

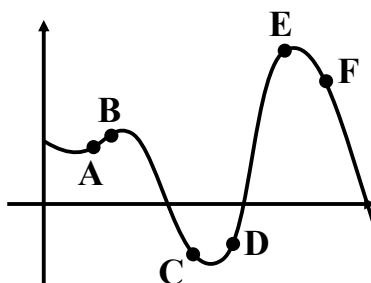
ج) شیب خط $y = x$: پاسخ: $m_6 = 1$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_1 > m_6 > m_4 > m_2 > m_3 > m_5$$

۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D

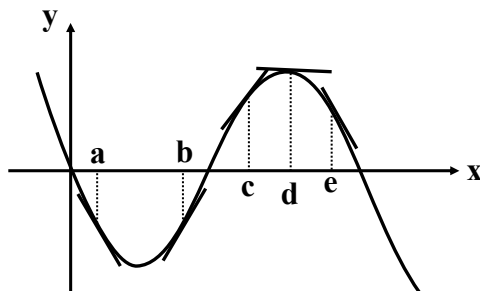


پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تندتر است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. همچنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.



۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	0
b	0.5
c	2
a	-0.5
e	-2



پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور x ‌هاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و همچنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

(الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

(ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

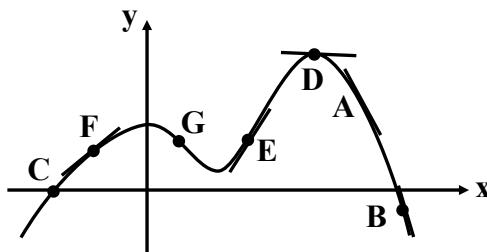
(پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

(ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

(ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

(ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A, B, C, D, E, F و G را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره

درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه D, C و F منفی است).

(ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است).

(پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

(ت) شیب منفی در نقاط D, F و C منفی است.

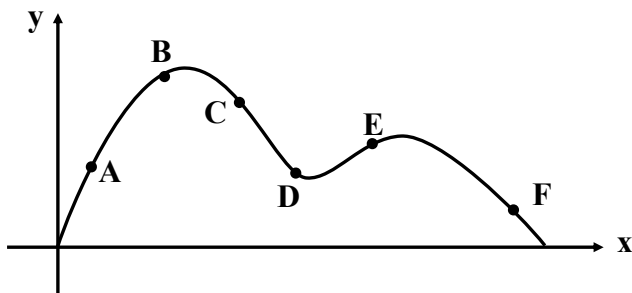
پاسخ: درست

(ث) $m_F < m_D < m_C$

پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است).

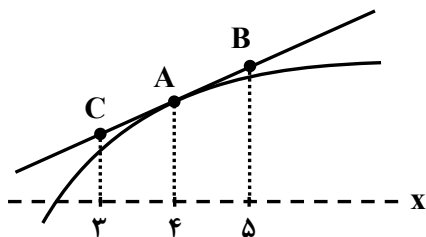
(ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست





۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1/5$, $f(4) = 25$, با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A , B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x = 4$ یعنی $f'(4)$.

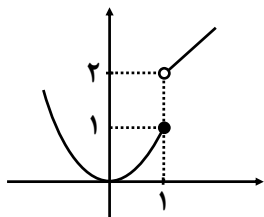
$$m = f'(4) = 1/5 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y_B - 25}{5 - 4} = 1/5 \rightarrow y_B = 26/5 \rightarrow B(5, 26/5)$$

$$1/5 = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \Rightarrow \frac{25 - y_C}{4 - 3} = 1/5 \rightarrow y_C = 23/5 \rightarrow C(3, 23/5)$$

تیپ سوم: مشتق پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(1)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که درهای چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ در نقطه $x = -1$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$$

$$\text{در راست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2$$

$$\text{در چپ: } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -(x-1) = +2$$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-1)$ موجود نیست.

۱۳- مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ: تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است. هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد. تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است. هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

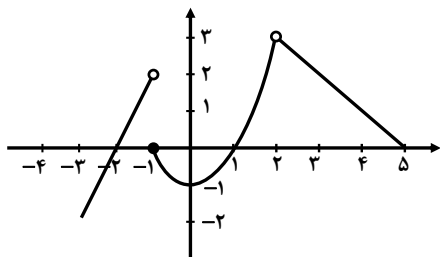
۱۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x = 1$ پیوستگی راست ندارد. (در راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x = 1$ مشتق راست ندارد.



$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

۱۵- اگر $f(x)$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیر f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$

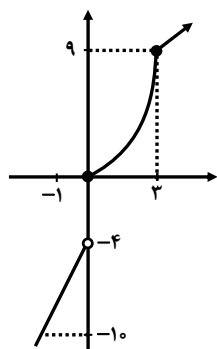


بررسی کنید.

پاسخ: تابع در بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست. زیرا در $x = -1$ ناپیوسته است.

تابع در بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است.

تابع در بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است.



$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$$

۱۶- تابع $f(x)$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(0) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$\Rightarrow$

پیوسته نیست

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x - 4 - 0}{x - 0} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$f(3) = 9$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

$\Rightarrow$

مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

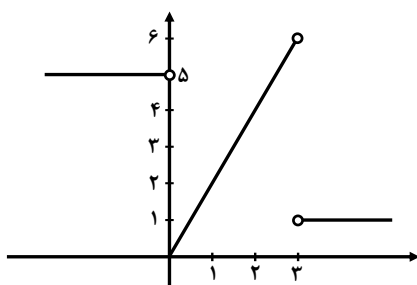
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x = 0$ و $x = 3$ مشتق پذیر نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

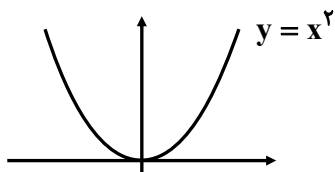




۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

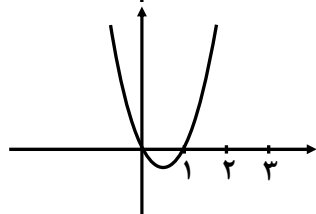
پاسخ:



$$y = x^2$$

ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

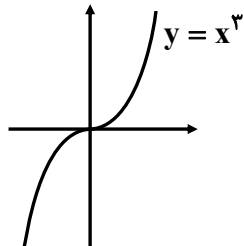
پاسخ:



$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x \\ f'(x) &= 2x - 1 \\ f'(2) &= 2(2) - 1 = 3 \end{aligned}$$

پ) در تمام نقاط مثبت شود.

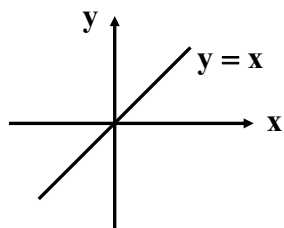
پاسخ:



$$y = x^3$$

ت) در تمام نقاط یکسان شود.

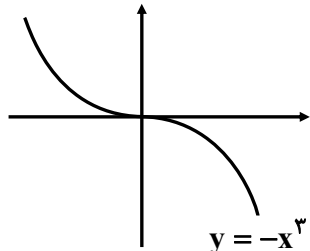
پاسخ:



$$y = x$$

ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:



$$y = -x^3$$

۱۸- مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \end{aligned}$$

هر چپ و راست در نقطه $x = 1$ برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در $x = 1$ ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیر f را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} -(x-2) = 4$$

پاسخ:

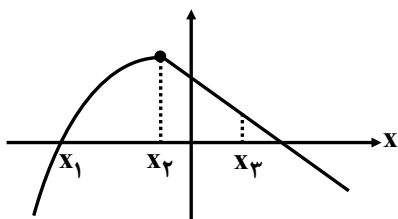
$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x^2 - 4) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$$

مشاهده می کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در $x = -2$ مشتق ندارد.

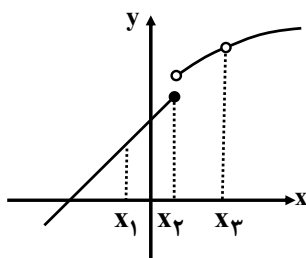


۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست.

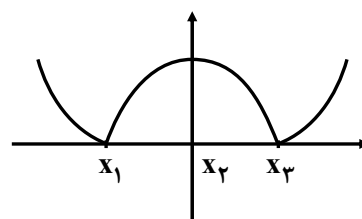
پاسخ:



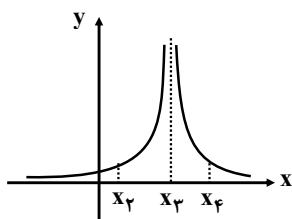
در x_2 مشتق پذیر نیست.
نقاط گوشه



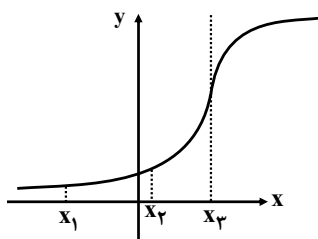
در x_2 و x_3 مشتق پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



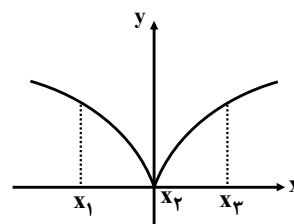
در x_1 و x_3 مشتق پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



در x_3 مشتق پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)



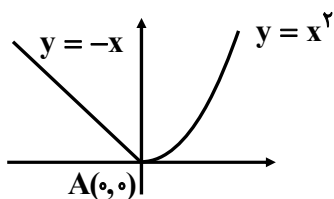
در x_3 مشتق پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_2 مشتق پذیر نیست.
مشتق نامتناهی

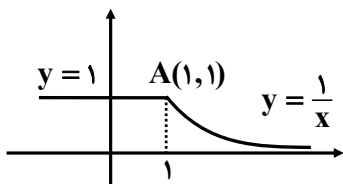
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.

پاسخ:



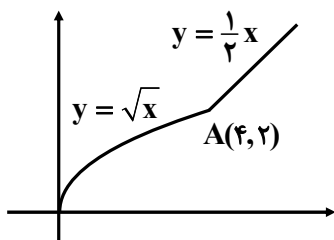
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = 0 \\ f'_-(0) = -1 \end{cases} \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -1, f'_-(1) = 0 \rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

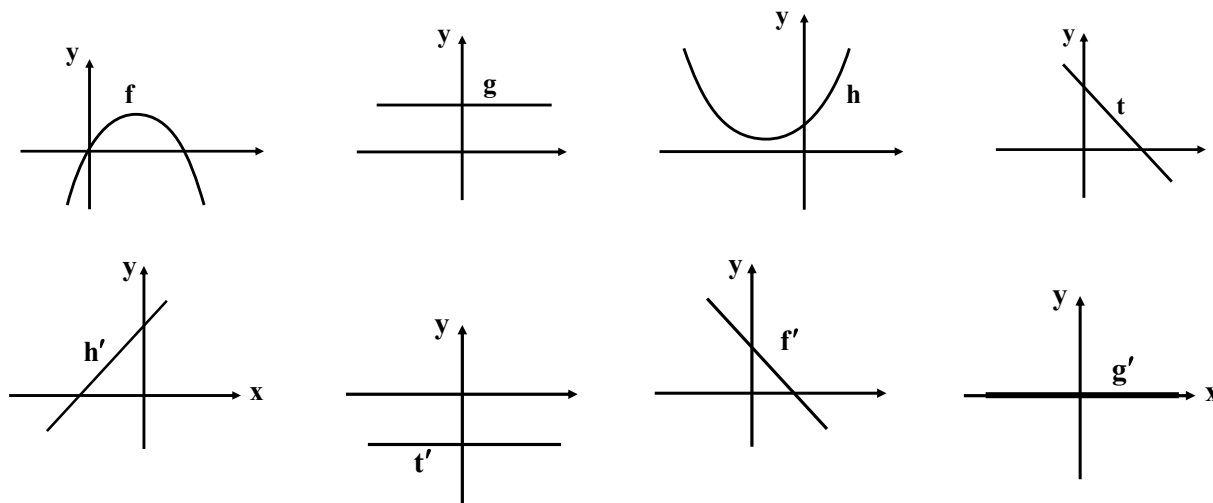


$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x & x > 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x < 4 \\ \frac{1}{2} & x > 4 \end{cases}$$

$$f'_+(4) = \frac{1}{4}, f'_-(4) = \frac{1}{2} \rightarrow f'_+(4) \neq f'_-(4)$$

۲۲- نمودار توابع f, g, h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:

(۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد.(۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور x ها قرار می‌گیرد.(۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور x ها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱) f(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$$

$$۲) f(x) = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2)$$

$$f'(x) = (4x)(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-2x + 7)$$

$$۳) f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(3x+1) - (3)(x^2-4)}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 12}{(3x+1)^2}$$

$$۴) f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$f'(x) = \frac{0(x-4) - (1)(1)}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)^2}$$

$$۵) f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$$

$$f'(x) = 8\left(\frac{-3(x^2+5) - (2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}\right)\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7$$



$$۶) f(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(1)(2x^2 + x - 1) - (x)(4x + 1)}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$۷) f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$$

$$f'(x) = (6x)(2x - 5)^2 + (3x^2 - 4)(2)(2x - 5)^1 = (2x - 5)(24x^2 - 30x - 16)$$

$$۸) f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x)$$

$$۹) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(-3x + 2) - (-3)(x^2 - 3x + 1)}{(-3x + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(-3x + 2)^2}$$

$$۱۰) f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ و $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(2) = f'(2)g(2) + f(2).g'(2) = 5 \times 8 + 3 \times (-6) = 40 - 18 = 22$$

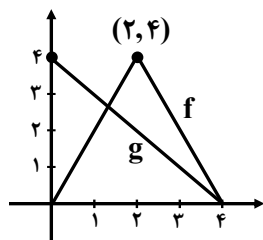
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2).g(2) - g'(2).f(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times 8 - 3 \times (-6)}{8^2} = \frac{40 + 18}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

۲۵- اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$$



۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) - g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می نویسیم:

$$mf = \frac{0-4}{4-2} = -2 = f'(x), \quad y-0 = (-2)(x-4) \Rightarrow y = -2x+8$$

$$mf = \frac{4-0}{2-0} = 2 = f'(x) \Rightarrow y-0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$$

$$mg = \frac{0-4}{4-0} = -1 \rightarrow y-0 = (-1)(x-4) \Rightarrow y = -x+4$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+8 & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = -x+4$$

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 2 \quad g(1) = 3 \quad g'(1) = -1$$

$$f(2) = 4 \quad f'_+(2) = -2, \quad f'_-(2) = 2 \quad g(2) = 2 \quad g'(2) = -1$$

$$f(3) = 2 \quad f'(3) = -2 \quad g(3) = 1 \quad g'(3) = -1$$

$$h'(1) = f'(1).g(1) + f(1).g'(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

$$h'(2) = \begin{cases} f'_+(2).g(2) + f(2).g'(2) = (-2) \times 2 + 4(-1) = -8 \\ f'_-(2).g(2) + f(2).g'(2) = 2 \times 2 + 4(-1) = 0 \end{cases}$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست

$$h'(3) = f'(3).g(3) + f(3).g'(3) = (-2) \times 1 + 2(-1) = -4$$

$$k'(1) = \frac{f'(1).g(1) - g'(1).f(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \times 3 - 2 \times (-1)}{3^2} = \frac{8}{9}$$

$$k'_+(2) = \frac{f'_+(2).g(2) - g'(2).f(2)}{g^2(2)} = \frac{-2 \times 2 - 4(-1)}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

$$k'_-(2) = \frac{f'_-(2).g(2) - g'(2).f(2)}{g^2(2)} = \frac{2 \times 2 - 4(-1)}{4} = 2$$

$$k'(3) = \frac{f'(3).g(3) - g'(3).f(3)}{g^2(3)} = \frac{-2 \times 1 - 2 \times (-1)}{1^2} = 0$$



تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد $(f(x) = 7\sqrt{x} + 50)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟

پاسخ:

$$f(25) = 7\sqrt{25} + 50 = 85 \Rightarrow \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = 1/4$$

$$f(0) = 7(\sqrt{0}) + 50 = 50$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{7}{2\sqrt{25}} = \frac{7}{10}, f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = 25$ بیشتر است.۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 40t = 0 \Rightarrow -5t(t - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V(t) = -10t + 40 \Rightarrow \begin{cases} V(0) = -10(0) + 40 = 40 \\ V(8) = -10(8) + 40 = -40 \end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $35 \frac{m}{s}$ و $-35 \frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V = -10t + 40 \Rightarrow \begin{cases} -10t + 40 = 35 \rightarrow -10t = -5 \rightarrow t = \frac{1}{2} \\ -10t + 40 = -35 \rightarrow -10t = -75 \rightarrow t = 7.5 \end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(8) = 11, T(12) = 19 \Rightarrow \frac{19 - 11}{12 - 8} = \frac{8}{4} = 2$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پاسخ:

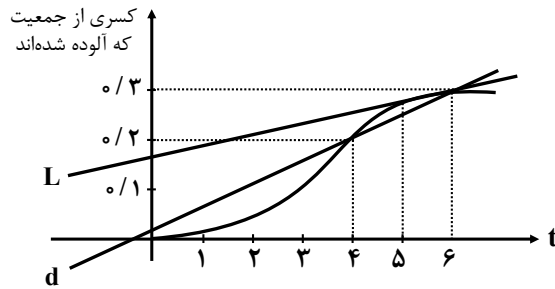
$$T(12) = 19, T(18) = 9 \rightarrow \frac{9 - 19}{18 - 12} = -1/6$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.



۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ و $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

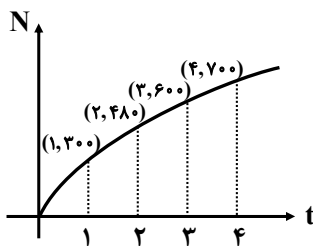
پاسخ: در $t=3$ شیب فط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=6$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(1) - N(0)}{1 - 0} = \frac{300 - 0}{1} = 300, \quad \frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{480 - 300}{1} = 180,$$

$$\frac{N(3) - N(2)}{3 - 2} = \frac{600 - 480}{1} = 120, \quad \frac{N(4) - N(3)}{4 - 3} = \frac{700 - 600}{1} = 100.$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لفظه‌ای در حال کاهش است) (تعقر روی به پایین است).

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده

است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 10 \\ f(5) = 5^2 - 5 + 10 = 30 \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط} = \frac{30 - 10}{5 - 0} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = \text{سرعت متوسط} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$



۳۳- تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

ثانیه t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر $f(t)$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t = ۰/۴$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های $[۰/۳, ۰/۴]$ و $[۰/۴, ۰/۵]$ به دست آوریم.

$$۱) \frac{f(۰/۵) - f(۰/۴)}{۰/۵ - ۰/۴} = \frac{۱۷/۴ - ۱۶/۳}{۰/۱} = \frac{۱/۱}{۰/۱} = ۱۱$$

$$۲) \frac{f(۰/۴) - f(۰/۳)}{۰/۴ - ۰/۳} = \frac{۱۶/۳ - ۱۵/۱}{۰/۱} = \frac{۱/۲}{۰/۱} = ۱۲$$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۱ + ۱۲}{۲} = ۱۱/۵$$

۳۴- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰, ۱]$ همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y = x^3$ و از $(۰, ۰)$ و $(۱, ۱)$ می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۱) - f(۰)}{۱ - ۰} = \frac{۱ - ۰}{۱ - ۰} = ۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لفظی: } f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(۰) = ۰$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y = \sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسط همواره نزولی است. (تقریبش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(\alpha) = ۰$ و $f(\alpha) = ۰$

پاسخ: نادرست است. تابع $y = x^3$ در نظر بگیرید.

$$f(۰) = ۰$$

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(۰) = ۰$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$m(4) = \sqrt{4} + 2 \times 4^3 = ۱۳ \Rightarrow ۱۳۰ - ۵۵/۷ = ۷۴/۳$$

$$m(3) = \sqrt{3} + 2 \times 3^3 = ۵۵/۷$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 3$ چه قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + ۵۴$$



۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس

از t ثانیه از رابطه $V = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چه قدر است؟

پاسخ:

$$V(0) = 40\left(1 - \frac{0}{100}\right)^2 = 40, \quad V(1) = 40\left(1 - \frac{1}{100}\right)^2 = 39/204 \Rightarrow \bar{V} = \frac{39/204 - 40}{1 - 0} = -0/796$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

پاسخ:

$$V' = 40 \times 2\left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{-8}{10}\left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

$$\begin{cases} V(0) = 40 \\ V(100) = 40 \times \left(1 - \frac{100}{100}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{V} = \frac{0 - 40}{100 - 0} = -\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{10} + \frac{0/8t}{100} = -\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{8t}{1000} = \frac{4}{10} \Rightarrow t = 50$$



اگر $f(x)$ یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که:

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

قضیه (۱۲): اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

قضیه (۱۳): فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) مقدار $f'(x) > 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) مقدار $f'(x) < 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) مقدار $f'(x) = 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

نکته: اکسترمم‌های مطلق تابعی مانند $f(x)$ در نقاطی وجود دارد که سه ویژگی زیر را داشته باشند:

۱. نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها وجود ندارد.

۲. نقاطی که مشتق در آن‌ها برابر صفر است.

۳. نقاط ابتدایی و انتهایی بازه موردنظر.

نقطه بحرانی

فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نتیجه: ۱) مجموعه حاصل از نقاط (۱) و (۲) را نقاط بحرانی تابع گویند.

۲) از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار در آن‌ها اتفاق می‌افتد، نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. (البته اگر تابع پیوسته باشد).

۳) در بین نقاط مذکور، نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد، نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.

آزمون مشتق اول

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازه‌ای مانند $I (I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) مقدار $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) ، $f'(x) < 0$ در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) ، $f'(x) < 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی است.

پ) اگر f' در نقطه c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا در هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.



مثال با استفاده از آزمون مشتق اول، مقادیر اکسترم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ پیدا کنید.

$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3 \sqrt{\sin x}}$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ (که در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ است) $f'(x) = 0$ پس $x = \frac{\pi}{3}$ یک نقطه بحرانی تابع f است و $x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر $f'(x)$ است، پس $f'(0)$ موجود نیست و $x = 0$ نقطهٔ بحرانی f است که در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ است و به ازای هر x از بازه $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ ، $f'(x) < 0$ و برای هر x از بازه $(0, \frac{\pi}{3})$ ، $f'(x) > 0$ پس طبق آزمون مشتق اول، $f(0) = 0$ یک مقدار مینیم موضعی است و چون به ازای هر x از بازه $(0, \frac{\pi}{3})$ ، $f'(x) > 0$ و برای هر x از بازه $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ، $f'(x) < 0$ بنابر آزمون مشتق اول، $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ یک مقدار ماکسیم موضعی تابع f است.

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

- قضیه (۱۴):** فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر نقطه مانند x از بازهٔ باز I موجود باشد.
- الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آن گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به بالا دارد.
- ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آن گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به پایین دارد.
- پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آن گاه آزمون بی نتیجه است.
- نقطهٔ عطف:** فرض کنید تابع f در نقطهٔ c پیوسته است، در این صورت نقطهٔ $(c, f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر هم زمان برقرار باشد:
- ۱) نمودار f در نقطهٔ $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد. (در واقع مشتق چپ و راست برابر داشته باشد).
 - ۲) جهت تقعر در نقطهٔ $(c, f(c))$ تغییر کند.

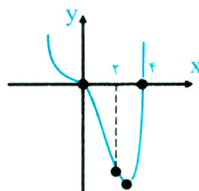
مثال جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^4 - 4x^3$ را در دامنهٔ آن بررسی نموده و نقاط عطف آن را به دست آورید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2$$

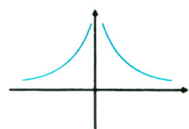
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	+	-	+	+
جهت تقعر f	رو به بالا	رو به پایین	رو به بالا	رو به بالا



$$m = f'(0) = 0 = \text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } x = 0$$

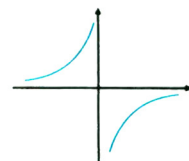
$$m = f'(2) = -16 = \text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } x = 2$$

چون در نقاط $(0,0)$ و $(2,-16)$ خط‌های مماس وجود دارد و جهت تقعر عوض می‌شود؛ لذا $(0,0)$ و $(2,-16)$ نقاط عطف تابع هستند.



مثال نمودار تابع f به شکل مقابل است، نمودار تابع f' را رسم کنید.

چون نمودار تابع f در هر دو طرف محور y دارای تقعر روبه بالا است، پس نمودار f' در هر دو طرف محور y باید صعودی باشد، در نتیجه:





نکاتی درباره نمودار تابع هموگرافیک: تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ ، $ad - bc \neq 0$ است را، تابع هموگرافیک می‌نامیم.

نکته در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

دامنه تابع:

مجانِب قائم:

مجانِب افقی:

نمودار تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و نقطه عطف ندارد.

مرکز تقارن نمودار:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$y \rightarrow \pm\infty : x = -\frac{d}{c}$$

$$x \rightarrow \pm\infty : y = \frac{a}{c}$$

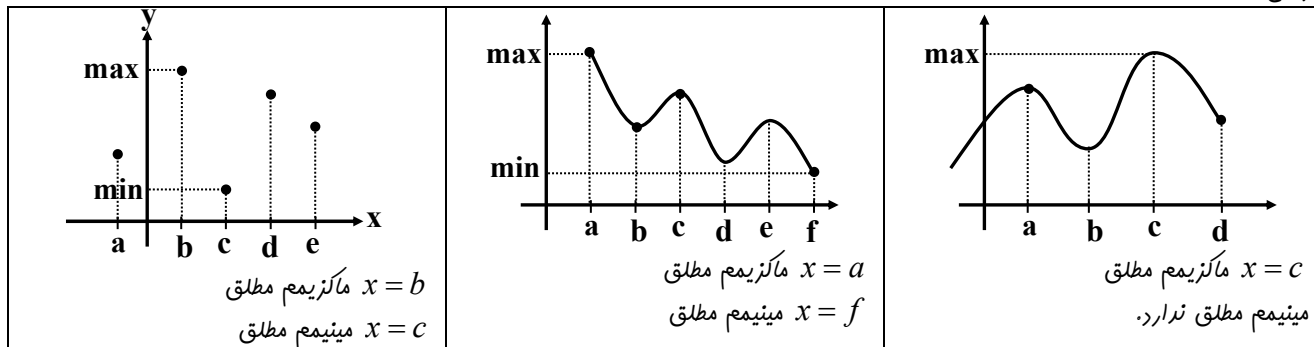
$$\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$$



فصل ۵ کاربرد مشتق ریاضی

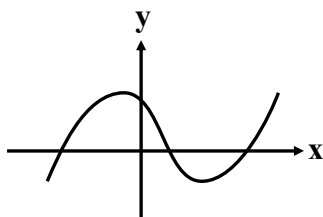
۱- در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

پاسخ:



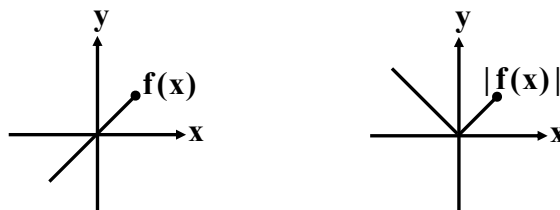
۲- نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

پاسخ:



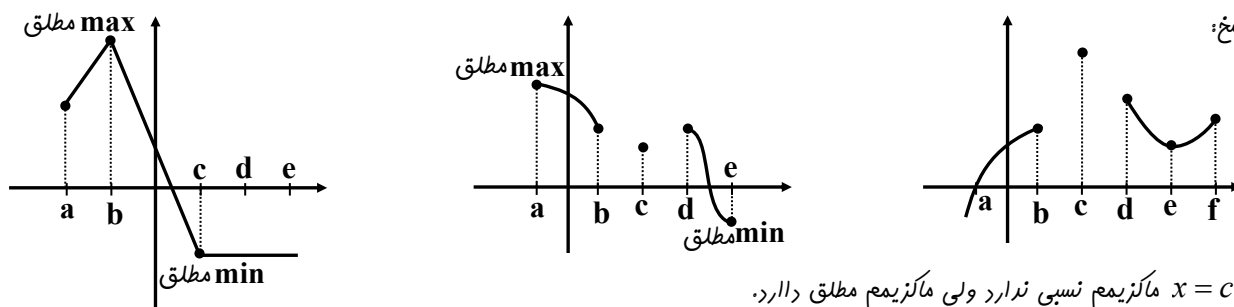
۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

پاسخ:



۴- دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است. اما ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست. حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص کنید.

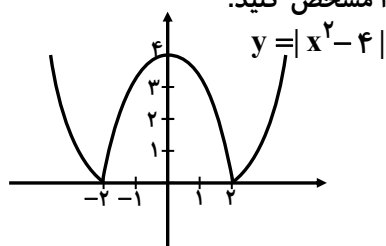
پاسخ:



در $x = c$ ماکزیمم نسبی ندارد ولی ماکزیمم مطلق دارد.
 در $x = e$ مینیمم نسبی دارد ولی در کل تابع مینیمم مطلق ندارد.



۵- در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول اکسترم‌های نسبی و اکسترم‌های مطلق را مشخص کنید.

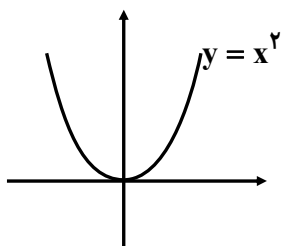


پاسخ: تابع $\max$ مطلق ندارد.

در $x = 0$ ، $\max$ نسبی دارد که مقدار آن برابر ۴ است.

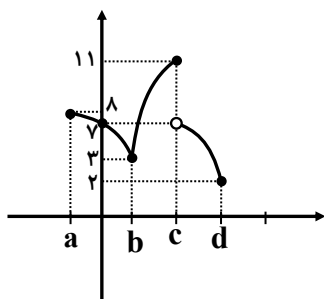
در $x = -2$ ، $x = 2$ ، $\min$ نسبی و مطلق دارد.

که مقدار آن‌ها برابر صفر است.



در $x = 0$ ، $\min$ مطلق و $\min$ نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.

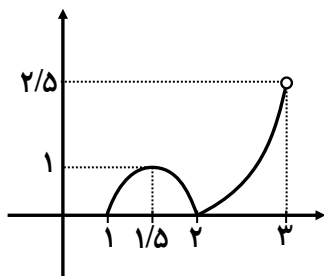
تابع $\max$ مطلق ندارد.



در $x = b$ ، $\min$ نسبی دارد که مقدار آن برابر ۳ است.

در $x = c$ ، $\max$ مطلق و نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱۱ است.

در $x = d$ ، $\min$ مطلق دارد و مقدار آن برابر ۲ است.

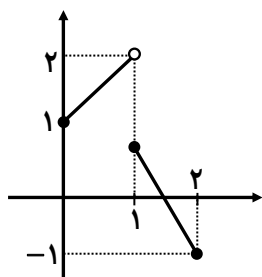


تابع در $x = 1$ و $x = 2$ ، $\min$ مطلق دارد که مقدار آن برابر صفر است.

در $x = 1.5$ ، $\max$ نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱ است.

در $x = 2$ ، $\min$ نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.

تابع $\max$ مطلق ندارد.

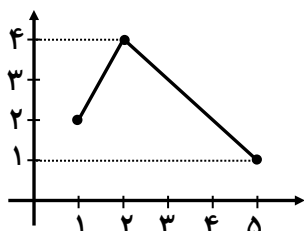


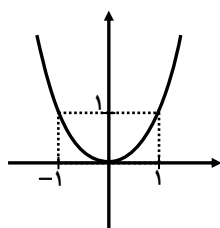
تابع $\max$ مطلق و نسبی ندارد.

در $x = 2$ ، $\min$ مطلق دارد که مقدار آن برابر (-۱) است.

۶- نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه (۲, ۴) $\max$ نسبی و در نقطه (۵, ۱) $\min$ مطلق دارد.

پاسخ:





۷- تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

پاسخ: در بازه $[0, 1]$ ، مینیمم مطلق تابع برابر صفر و ماکزیمم مطلق آن برابر ۱ است.

اما در بازه $(0, 1)$ ، مینیمم و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) وجود اکسترم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

پاسخ: در نقطه $(0, 0)$ دارای مینیمم مطلق است ولی ماکزیمم مطلق ندارد.

۸- نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

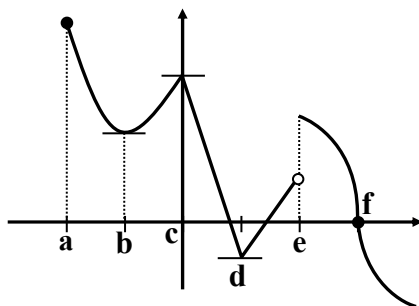
(۱) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن نقطه برابر صفر باشد.

(۲) نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

(۳) نقطه ماکزیمم مطلق تابع نقطه بحرانی نباشد.

(۴) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

(۵) نقطه‌ای داشته باشد که اکسترم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۹- نقاط اکسترم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده‌شده در صورت وجود بیاید و نقاط بحرانی این توابع را به دست آورید.

الف) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $[-2, 1]$

پاسخ:

نقطه بحرانی $f'(x) = 6x - 2 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

	$\frac{1}{3}$	
f'	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$

مینیمم نسبی $f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^2 - 2(\frac{1}{3}) + 5 = \frac{14}{3}$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^2 - 2(-2) + 5 = 21 \\ f(\frac{1}{3}) &= \frac{14}{3} \\ f(1) &= 3(1)^2 - 2(1) + 5 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \max \text{ مطلق} &= (-2, 21) \\ \min \text{ مطلق} &= (\frac{1}{3}, \frac{14}{3}) \end{aligned}$$

ب) $f(x) = x^3 - 3x$ $[-1, 2]$

پاسخ:

نقاط بحرانی $f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$



	-1	+1	
f'	+	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2 \xrightarrow{\text{نسبی max}} (-1, 2)$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2 \xrightarrow{\text{نسبی min}} (1, -2)$$

$$f(-1) = 2 \rightarrow \text{مطلق max} = (-1, 2)$$

$$f(1) = -2 \rightarrow \text{مطلق min} = (1, -2)$$

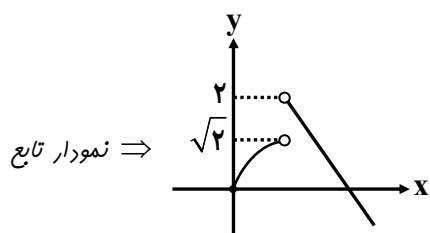
$$f(2) = 2^3 - 3(2) = 2 \rightarrow \text{مطلق max} = (2, 2)$$

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$$

پاسخ:

نقطه بحرانی $\Rightarrow$ نقطه ناپوستگی $x=2 \rightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{array}{c|c|c} & 0 & 2 \\ \hline f' & + & - \\ \hline f & \nearrow & \searrow \end{array} \Rightarrow (2, 2) \text{ ماکزیمم نسبی}$$



۱۰- ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1, 2)$ ، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

پاسخ: چون نقطه $(1, 2)$ عضو تابع $f(x)$ است، پس $f(1) = 2$
همچنین چون نقطه $(1, 2)$ ، ماکزیمم نسبی تابع است پس $f'(1) = 0$ می‌باشد.

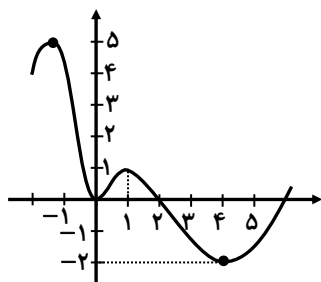
$$f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b = 2 \rightarrow a + b = 1$$

$$f'(x) : 3x^2 + a \xrightarrow{f'(1)=0} 3 + a = 0 \rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$\xrightarrow{a+b=1} -3 + b = 1 \rightarrow \boxed{b = 4}$$

۱۱- نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند. $f(0) = 0$ ، $f(4) = -2$ ، $f(-1) = 5$ ، نقطه $(1, 1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

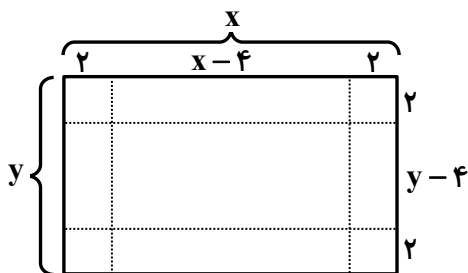
پاسخ:





۱۲- یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $x \cdot y = 100 \text{ cm}^2$ و $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار شود.

پاسخ:



$$\Rightarrow x, y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

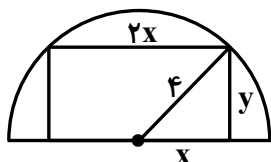
$$\Rightarrow V = 2 \times (x-4)(y-4) = 2xy - 8x - 8y + 32$$

$$\frac{xy=100}{y=\frac{1}{x}} \rightarrow V = 232 - 8x - \frac{800}{x} \Rightarrow V'(x) = -8 + \frac{800}{x^2}$$

$$\frac{V'(x)=0}{x^2} \rightarrow \frac{800}{x^2} = 8 \rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$$

۱۳- یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار باشد.

پاسخ:



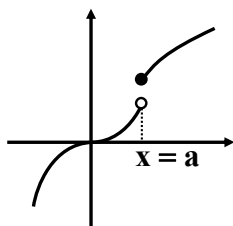
$$x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$S = 2x \cdot y = 2x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow S' = 2\sqrt{16 - x^2} + 2x \times \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

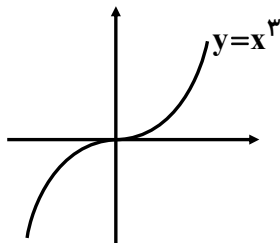
$$\Rightarrow S' = \frac{2(16 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 32 \rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} \Rightarrow y = \sqrt{8}$$

۱۴- توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟
پاسخ: خیر - زیرا ممکن است تابع دارای ناپیوستگی باشد. نمودار روبه‌رو بیانگر یک تابع اکیداً صعودی است ولی در نقطه $x = a$ مشتق ندارد.



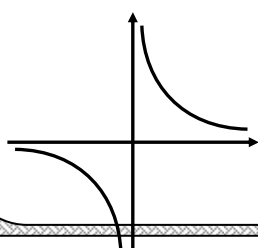
ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

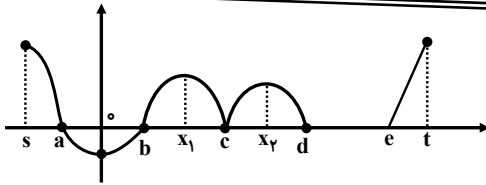


پاسخ: بله - تابع $y = x^3$ ، صعودی اکیداً است و مشتق در هر نقطه از آن مثبت است.

۱۵- آیا می‌توان گفت تابع $y = \frac{1}{x}$ در تمام دامنه خود نزولی اکید است؟

پاسخ: خیر - با توجه به نمودار تابع در می‌یابیم که تابع در $x = 0$ معانبت قائم دارد پس دارای جهش می‌باشد پس در تمام دامنه‌اش نزولی اکید نیست ولی در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی اکید است.





۱۶- نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.

می‌دانیم در بازه‌هایی که نمودار f' بالای محور x هاست نمودار تابع f صعودی است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s, t]$ بررسی کنید.

پاسخ: تابع در بازه‌های (s, a) و (b, t) صعودی و در بازه‌ی (a, b) نزولی و همچنین در بازه (d, e) نزولی می‌باشد.

ب) نقاط a, b, c, d, e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پاسخ: کافی است جدول تعیین علامت تابع f' را به دست آوریم.

	s	a	b	c	d	e	
f'		+	-	+	+	صفر	+
f		↗	↘	↗	↗	↗	

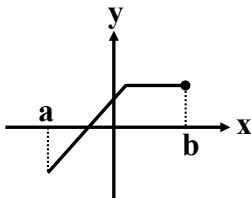
در $x = a$ ماکزیمم نسبی دارد.

در نقاط a, b, c, d, e بحرانی هستند زیرا مشتق در این نقاط برابر صفر است و در $x = b$ مینیمم نسبی است.

۱۷- برای هر یک از موارد زیر، یک نمودار رسم کنید.

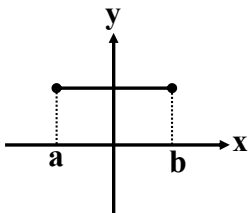
الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

پاسخ:



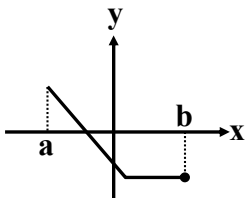
ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

پاسخ: نکته: توابع ثابت هم صعودی هستند و هم نزولی.



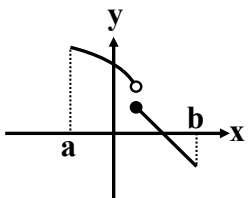
پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پاسخ:



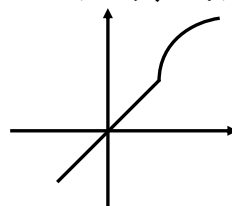
ت) تابعی که در یک بازه نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه ناپيوسته است.

پاسخ:



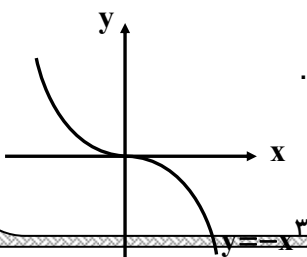
ث) تابعی مانند f در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن پیوسته باشد اما در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نباشد.

پاسخ:



ج) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

پاسخ:





۱۸- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

پاسخ:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{y'=0} 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

تابع در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(2, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-1, 2)$ نزولی

x		-1		2	
y'	+		-		+
y	↗		↘		↗

ب) $f(x) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow Df = \mathbb{R} - \{2\}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{(1)(x-2) - (1)(x)}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 2 & \\ \hline f' & - & - \\ \hline f & \searrow & \searrow \end{array}$$

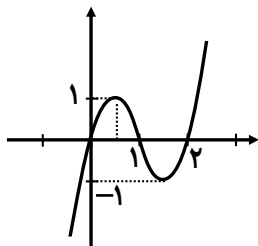
تابع در $\mathbb{R} - \{2\}$ (در تمام نقاط دامنه) نزولی می‌باشد.

جهت تقعر نمودار و نقطه عطف آن

۱۹- موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه (صعودی) است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه (افزایش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به (بالا) است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه (نزولی) است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه (کاهش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به (پایین) است.

۲۰- نمودار تابع $f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید.

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

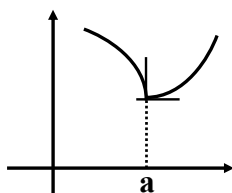
$$\text{بر بازه } (-\infty, 1), f''(x) < 0$$

$$\text{بر بازه } (1, +\infty), f''(x) > 0$$

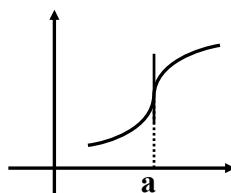
پاسخ:

۲۱- در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.

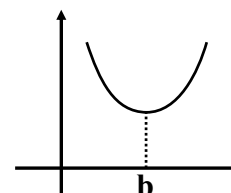
پاسخ:



نقطه عطف نیست



عطف



نقطه عطف ندارد



۲۲- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

پاسخ: درست است.

ب) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.

پاسخ: نادرست است. در تابع $f(x) = x^4$ ، $f''(a) = 0$ می‌شود ولی چون جهت تقعر عوض نمی‌شود پس نقطه عطف است.

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.

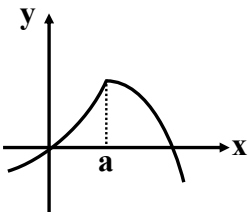
پاسخ: درست است.

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

پاسخ: نادرست است. تابع $y = x^3$ تابع اکید صعودی است و در $x = 0$ نقطه عطف دارد.

۲۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.

پاسخ:



۲۴- جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آن‌ها بررسی کرده و نقطه عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 4$

پاسخ:

$$f'(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} f'' & - & + \\ \hline f & \text{concave down} & \text{concave up} \end{array}$$

$x = 0$ نقطه عطف است.

ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $Df = \mathbb{R} - \{1\}$ تقعر رو به بالا تقعر رو به پایین

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - (1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 + 4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} f'' & - & + \\ \hline f & \text{concave down} & \text{concave up} \end{array}$$

$x = 1$ نقطه عطف نیست.

پ) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-3 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}}{(3\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(x+1)^5}} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} f'' & + & - \\ \hline f & \text{concave up} & \text{concave down} \end{array}$$

$x = -1$ نقطه عطف است.

تقعر رو به پایین تقعر رو به بالا



۲۵- برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقاط داده شده، نقطه عطف آن باشد.

- الف) نقطه $(0, 0)$ پاسخ: $y = x^3$
- ب) نقطه $(1, 0)$ پاسخ: $y = (x-1)^3$
- پ) نقطه $(0, 1)$ پاسخ: $y = (x^3 + 1)$
- ت) نقطه $(2, 2)$ پاسخ: $y = (x-2)^3 + 2$

۲۶- مقادیر a ، b و c در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0) = 1$ ، $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

پاسخ:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$f(0) = 1 \rightarrow 0 + 0 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \rightarrow a + b = 1$$

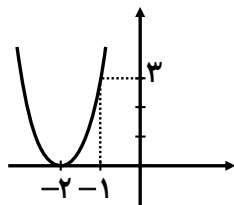
$$x = \frac{1}{3} \text{ عطف} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6a \times \left(\frac{1}{3}\right) + 2b = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -2 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

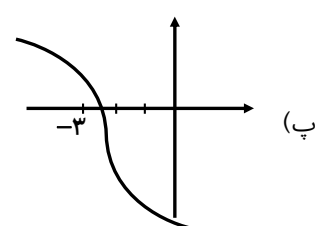
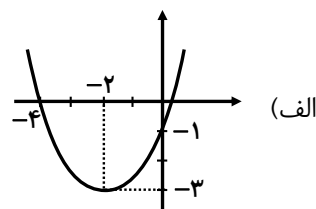
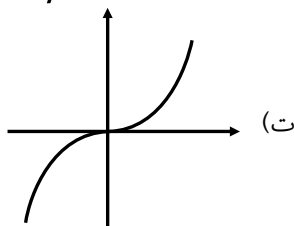
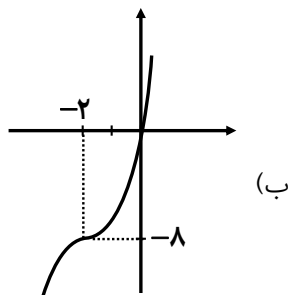
۲۶- اگر شکل کشیده شده مربوط به نمودار تابع f' باشد، کدام نمودار می تواند نمودار تابع f باشد؟

پاسخ:



$$x_s < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

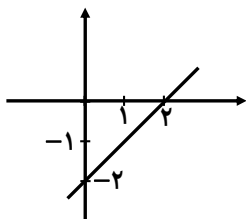
یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی باشد، پس شکل (ب) درست است.





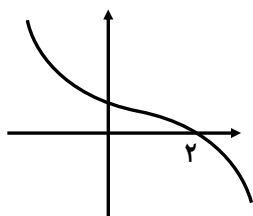
۲۷- اگر شکل زیر نمودار تابع f''' باشد، کدام نمودار می تواند نمودار تابع f باشد.

پاسخ:

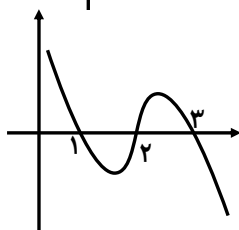


$$y = ax + b \Rightarrow a > 0, b < 0$$

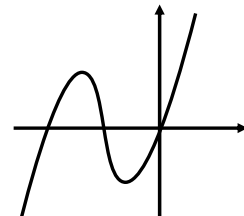
تابع صعودی و طول نقطه عطف یعنی $x = \frac{-b}{3a}$ مثبت می باشد. که گزینه ی (پ) درست است.



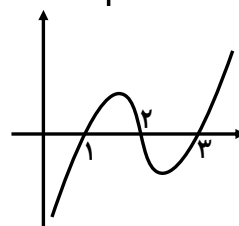
(ب)



(ت)

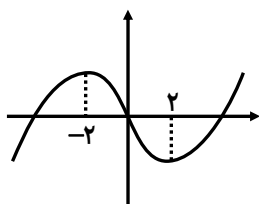


(الف)



(پ)

۲۸- اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a ، b و c را پیدا کنید.



پاسخ:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0,0)} 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a$$

$$\xrightarrow[\substack{x=0 \\ y''=0}]{y''=0} 6(0) + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\xrightarrow[\substack{\min \\ f'(2)=0}]{x=2} 3(2)^2 + b = 0 \rightarrow b = -12$$

۲۹- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$

پاسخ:

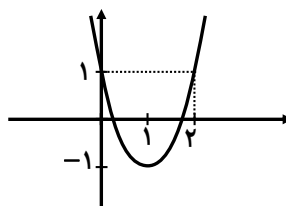
$$f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 4 > 0$$

$$f(0) = 1$$

	0	1	
f'	-	-	+
f''	(+)	(+)	(+)
f	↘	↘	↗

ب) $f(x) = x^2 - 5x + 5 \quad D_f = \mathbb{R}$



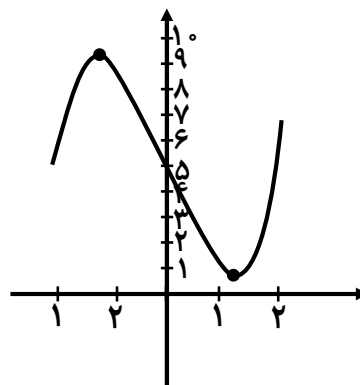


پاسخ:

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$		
f'	+	0	-	+	
f''	(-)	(-)	(+)	(+)	
f	↖	9/3	↘	0/7	↗



پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

پاسخ:

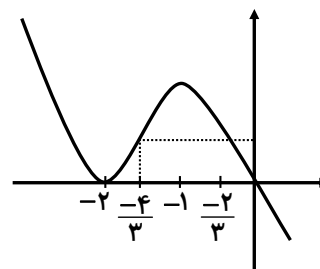
$$f'(x) = (-1)(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$$

$$= (x+2)(-x-2-2x) = (x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = (1)(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = -6x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

x	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
f'	-	+	+	-
f''	(+)	(+)	(-)	(-)
f	↘	↗	↖	↘



ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

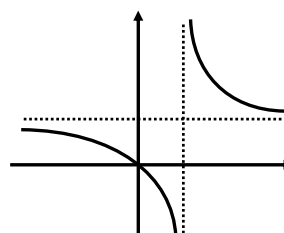
پاسخ:

$$(I) \begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (1)(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 - (-3)(2(x-2))}{(x-2)^4} = \frac{+6}{(x-2)^3}$$

x	0	2	
f'	-	-	-
f''	(-)	(-)	(+)
f	↘	↘	↗





$$\text{ث) } f(x) = \frac{-x}{x+3} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

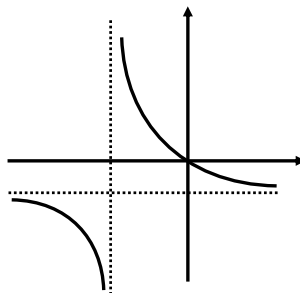
پاسخ:

$$(I) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -3 & \text{میانب قائم} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow y = -1 & \text{میانب افقی} \end{cases}$$

$$(II) f'(x) = \frac{-(x+3) - (1)(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2}$$

$$(III) f''(x) = \frac{0 + 3(2(x+3))}{(x+3)^4} = \frac{6}{(x+3)^3}$$

	-3	
f'	-	-
f''	⤵	⤴
f	↘	↗



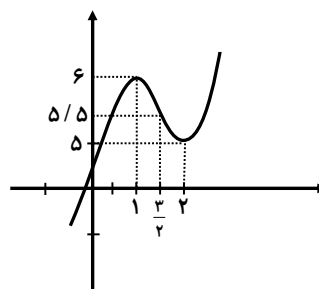
$$\text{ج) } f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

پاسخ:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'	+	+	0	-	0	-	0	+	
f''	-	-	-	-	0	+	+	+	
f	↗	↘	↗	↘	↘	↗	↘	↗	
			6		5/5		5		



۳۰- فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع میانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد. ضابطه تابع را به دست آورید.

پاسخ:

$$\text{محل تقاطع میانب‌ها: } (2, 1) \Rightarrow (2, 1) = \left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

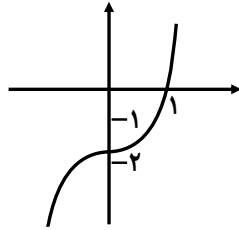
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c \\ \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c \end{cases}$$

$$(-1, 0) \text{ صرق} \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b$$

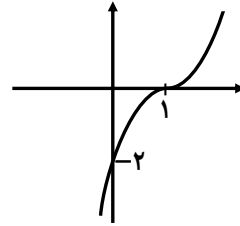
$$f(x) = \frac{ax+a}{ax-2a} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$



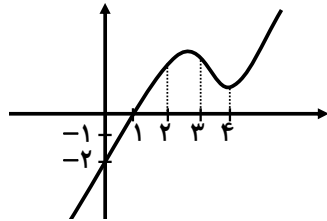
۳۱- کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.



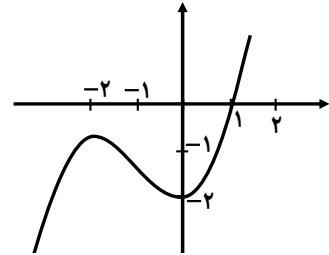
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

پاسخ:

$$\text{نقطه عطف: } x = \frac{-b}{3a} = \frac{0}{3(1)} = 0 \Rightarrow f(0) = -2$$

تابع صعودی $a > 0 \Rightarrow$

پس نقطه $(0, -2)$ نقطه عطف و تابع صعودی است پس گزینه (ب) درست است.