



شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $A(a, f(a))$  به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حاصل حد بالا را مشتق تابع  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامند و با نماد  $f'(a)$  نمایش می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

محاسبه  $f'(a)$  به روش دیگر:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با یک نامگذاری مناسب می‌توان فرمول فوق را به صورت مقابل نوشت:

به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال (۱) ثابت کنید:

$$a+h=x \Rightarrow h=x-a \Rightarrow \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^2 + 3$  را در  $x = -2$  بنویسید.

$$m(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 3 - (a^2 + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 3 - a^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + 0 = 2a \Rightarrow m = 2(-2) = -4$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad A \begin{vmatrix} -2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$y - 7 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 1$$

### مشتق پذیری و پیوستگی

تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  مشتق پذیر است، هرگاه، یکی از دو تعریف زیر دارای حد متناهی باشند:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

قضیه (۱۱): اگر تابع  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد، آن‌گاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

مثال (۲) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته نباشد، آن‌گاه  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر هم نیست.

مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در  $x = a$  را به ترتیب با  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



**نتیجه:** اگر تابع  $f(x)$  در  $x = a$  پیوسته باشد و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$  یعنی حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشیم، در این صورت خط  $x = a$  را مماس قائم بر منحنی  $f(x)$  در نقطه  $(a, f(a))$  می‌نامیم، بدیهی است که  $f'(a)$  در این حالت وجود ندارد.

**نکته:** تابع  $f(x)$  در  $x = a$  مشتق پذیر نیست، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱)  $f(x)$  در  $a$  پیوسته نباشد.

(۲)  $f(x)$  در  $a$  پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در  $x = a$ :

(الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای)

(ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای)

(پ) هر دو نامتناهی باشند.

**یادآوری:** اگر  $x$  عضوی از دامنه تابع  $f$  باشد، تابع مشتق  $f$  در  $x$  را با نماد  $f'(x)$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر این که حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه  $f$  که برای آن‌ها  $f'$  موجود باشد را دامنه  $f'$  می‌نامیم.

**مثال:** اگر  $f(x) = x^r$  باشد، تابع مشتق و دامنه آن را محاسبه کنید و  $f'(r)$  را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^r - x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^r + r x^{r-1} h + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} h^2 + \dots - x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r x^{r-1} h + \dots}{h} = r x^{r-1}$$

که با توجه به تابع مشتق، دامنه آن برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشد.

$$f'(r) = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r - r^r}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{(x-r)(x^{r-1} + x^{r-2}r + \dots + r^{r-1})}{(x-r)} = (r^{r-1} + r^{r-2}r + \dots + r^{r-1}) = 1 \cdot r^r = r^r$$

### محاسبه مشتق برخی توابع

۱)  $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

۲)  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

۳)  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۴)  $f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}, ax+b > 0$

۵)  $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

۶)  $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

۷)  $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

اگر توابع  $f$  و  $g$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشند، آن‌گاه توابع  $kf$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) و  $f \pm g$  و  $f \times g$  ( $g(a) \neq 0$ ) نیز مشتق پذیر هستند.

(الف)  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

(ب)  $(kf)'(a) = kf'(a)$

(پ)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(ت)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$



## مشتق توابع مرکب

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب  $f \circ g$  مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

## قاعده زنجیره‌ای

اگر  $f$  تابعی بر حسب  $u$  و  $u$  تابعی بر حسب  $x$  باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال مشتق تابع  $f(x) = \tan^2 x$  را محاسبه کنید.

$$\tan x = u \Rightarrow y = u^2$$

$$y' = 2uu' = 2(1 + \tan^2 x) \tan x$$

## مشتق پذیری روی یک بازه

تابع  $f(x)$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر است، هرگاه  $f$  در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $a$  مشتق راست و در نقطه  $b$  مشتق چپ داشته باشد.

## مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع  $y = f(x)$  را با نماد  $y' = f'(x)$  نمایش داده و مشتق مرتبه دوم آن را به صورت  $y'' = f''(x)$  نمایش می‌دهند.

مثال مشتق مرتبه دوم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1(x^2 - 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^4}$$

## آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

به طور کلی، آهنگ متوسط تغییر یک تابع در بازه‌ای مانند  $(a, a+h)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x = a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

نکته آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق (شیب خط مماس) در آن نقطه متناظرند.

مثال سنگریزه‌ای در آب استخری می‌اندازیم؛ در نتیجه دایره‌هایی به شعاع  $r = 5$  ایجاد می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع دایره با آهنگ

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S' = 2\pi r \times r' = 2\pi(5)(\frac{1}{2}) = 5\pi(\frac{1}{2}) = \frac{5\pi}{2}$$

$\frac{1}{2}$  تغییر می‌کند، مساحت دایره با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



## تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

## تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^2 + 3$  را در نقطه‌ای به طول  $(-2)$  بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $A(\alpha, f(\alpha))$  به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7, \quad f(-2+h) = (-2+h)^2 + 3 = 4 - 4h + h^2 + 3 = 7 - 4h + h^2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - 4h + h^2 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 + h)}{h} = -4$$

۲- اگر  $f(x) = x^2$ ،  $f'(3)$  را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(3) = 9$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad \text{روش دوم: می‌دانیم}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

۳- برای تابع  $f(x) = -x^2 + 10x$ ،  $f'(8)$  را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(8) = -(8)^2 + 10(8) = -64 + 80 = 16$$

$$f'(8) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(8+h)^2 + 10(8+h) - 16}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(64 + h^2 + 16h) + 80 + 10h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -(h+6) = -6$$

روش دوم:

$$f'(8) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-x^2 + 10x - 16}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-(x-8)(x-2)}{x-8} = -6$$

۴- اگر  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ،  $f'(2)$  را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی  $f$  را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع

بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad f(2) = 9 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

$$\begin{cases} (2, 9) \\ m = 10 \end{cases} \Rightarrow y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11 \quad \text{معادله خط مماس}$$



۵- اگر  $f(x) = x^3 - 2$ ،  $f'(-1)$  را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

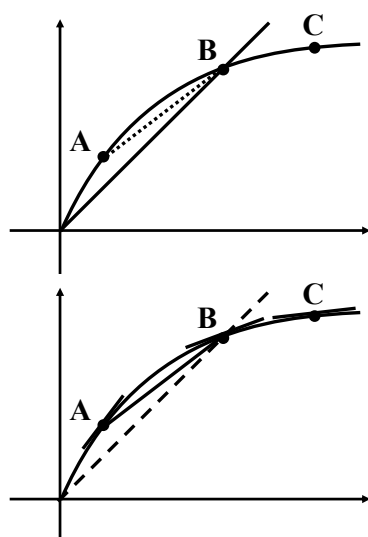
$$f(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار  $y = f(x)$  در شکل زیر شیب‌های داده شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه  $A$ : پاسخ:  $m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه  $B$ : پاسخ:  $m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه  $C$ : پاسخ:  $m_3$

ت) شیب خط  $AB$ : پاسخ:  $m_4$

ث) شیب خط  $y = 2$ : پاسخ:  $m_5 = 0$

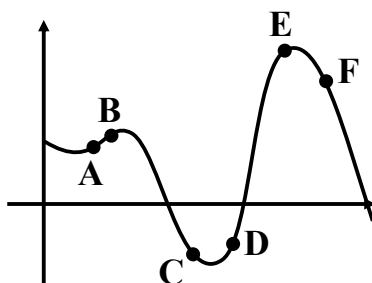
ج) شیب خط  $y = x$ : پاسخ:  $m_6 = 1$

با توجه به نمودار شیب در نقطه  $A$  بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_1 > m_6 > m_4 > m_2 > m_3 > m_5$$

۷- نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

| شیب           | نقطه |
|---------------|------|
| -۳            | F    |
| -۱            | C    |
| ۰             | E    |
| $\frac{1}{2}$ | A    |
| ۱             | B    |
| ۲             | D    |

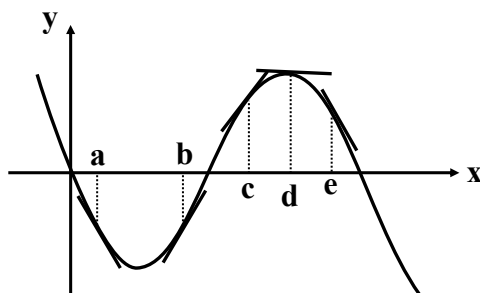


پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه  $D$  از شیب در نقطه  $B$  تندتر است پس عدد ۲ را برای  $D$  انتخاب می‌کنیم. همچنین در نقطه  $F$  با سرعت بیشتری نسبت به نقطه  $C$  در حال نزول هستیم.



۸- با در نظر گرفتن نمودار  $F$  در شکل زیر، نقاط به طول‌های  $a, b, c, d$  و  $e$  را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.

| $x$ | $f'(x)$ |
|-----|---------|
| $d$ | $0$     |
| $b$ | $0.5$   |
| $c$ | $2$     |
| $a$ | $-0.5$  |
| $e$ | $-2$    |



پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه  $d$  موازی محور  $x$ ‌هاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه  $c$  تندتر از شیب در نقطه  $b$  می‌باشد و همچنین در نقطه  $e$  با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند  $A, B, C, D, E, F$  و  $G$  را روی نمودار  $y = f(x)$  مشخص کنید. به طوری که:

(الف)  $A$ ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

(ب)  $B$  نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

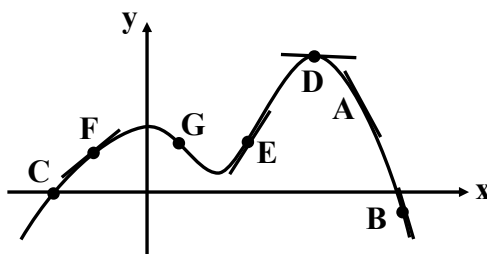
(پ)  $C$  نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

(ت)  $D$  نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

(ث) نقاط  $E$  و  $F$  نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

(ج)  $G$  نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط  $A, B, C, D, E, F$  و  $G$  را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره

درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه  $D, C$  و  $F$  منفی است).

(ب)  $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه  $A$  از نقطه  $B$  تندتر است).

(پ)  $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

(ت) شیب منفی در نقاط  $D, F$  و  $C$  منفی است.

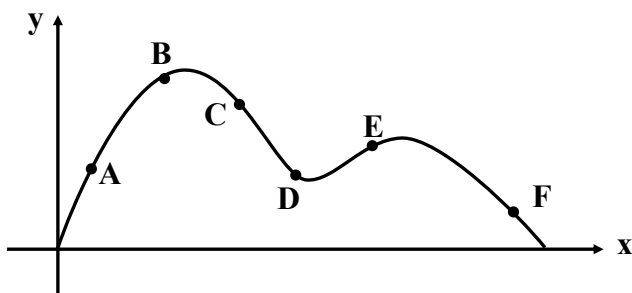
پاسخ: درست

(ث)  $m_F < m_D < m_C$

پاسخ: (شیب در نقطه  $D$  کندتر از نقطه  $C$  است).

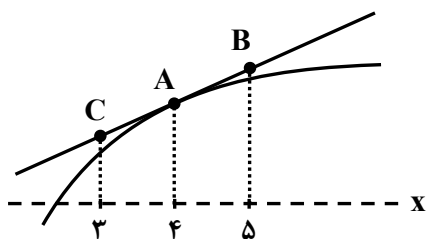
(ج)  $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست





۱۱- برای تابع  $f$  در شکل زیر داریم:  $f'(4) = 1/5$ ,  $f(4) = 25$ , با توجه به شکل مختصات نقاط  $A$ ,  $B$  و  $C$  را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط  $A$ ,  $B$  و  $C$  عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه  $x = 4$  یعنی  $f'(4)$ .

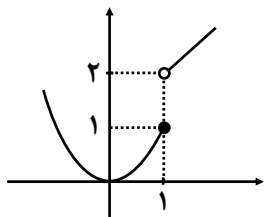
$$m = f'(4) = 1/5 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y_B - 25}{5 - 4} = 1/5 \rightarrow y_B = 26/5 \rightarrow B(5, 26/5)$$

$$1/5 = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \Rightarrow \frac{25 - y_C}{4 - 3} = 1/5 \rightarrow y_C = 23/5 \rightarrow C(3, 23/5)$$

### تیپ سوم: مشتق پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع  $g$  (شکل زیر) را به صورت  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$  در نظر می‌گیریم. چرا  $g'(1)$  موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که درهای چپ و راست تابع در نقطه  $x = 1$  با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  در نقطه  $x = -1$  موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$$

$$\text{در راست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2$$

$$\text{در چپ: } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -(x-1) = +2$$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس  $f'(-1)$  موجود نیست.

۱۳- مشتق پذیری روی بازه‌های  $[a, b]$  و  $(a, b)$  را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ: تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر است. هرگاه  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $a$  مشتق راست داشته باشد. تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است. هرگاه  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $b$  مشتق چپ داشته باشد.

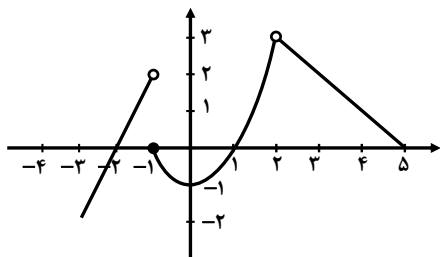
۱۴- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم. چرا تابع  $f$  در بازه  $[1, 2]$  مشتق پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه  $(1, 2)$  مشتق پذیر است، اما در  $x = 1$  پیوستگی راست ندارد. (در راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در  $x = 1$  مشتق راست ندارد.



$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

۱۵- اگر  $f(x)$  نمودار  $f$  را رسم کنید و مشتق پذیر  $f$  را روی بازه‌های  $[-1, 1]$ ،  $(2, 5)$  و  $[-2, 0]$

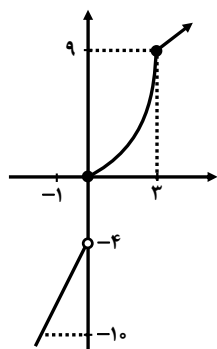


بررسی کنید.

پاسخ: تابع در بازه  $[-2, 0]$  مشتق پذیر نیست. زیرا در  $x = -1$  ناپیوسته است.

تابع در بازه  $(2, 5)$  مشتق پذیر است.

تابع در بازه  $[-1, 1]$  مشتق پذیر است.



$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$$

۱۶- تابع  $f(x)$  داده شده است.

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

پاسخ:

ب) نشان دهید که  $f'(0)$  و  $f'(3)$  وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(0) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$\Rightarrow$

پیوسته نیست

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x - 4 - 0}{x - 0} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$f(3) = 9$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

$\Rightarrow$

مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

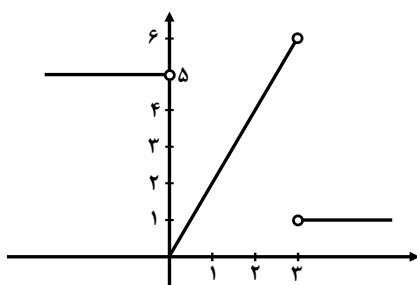
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در  $x = 0$  و  $x = 3$  مشتق پذیر نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

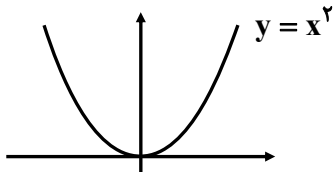




۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

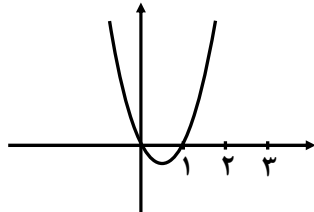
پاسخ:



$$y = x^2$$

ب) در  $x = 2$  برابر ۳ شود.

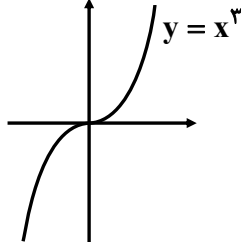
پاسخ:



$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x \\ f'(x) &= 2x - 1 \\ f'(2) &= 2(2) - 1 = 3 \end{aligned}$$

پ) در تمام نقاط مثبت شود.

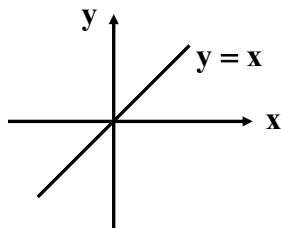
پاسخ:



$$y = x^3$$

ت) در تمام نقاط یکسان شود.

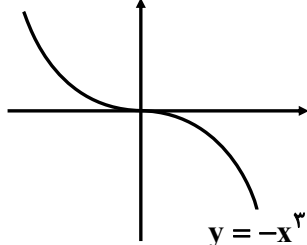
پاسخ:



$$y = x$$

ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:



$$y = -x^3$$

۱۸- مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \end{aligned}$$

هر چپ و راست در نقطه  $x = 1$  برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در  $x = 1$  ندارد.

۱۹- اگر  $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیر  $f$  را در نقطه  $x = -2$  بررسی کنید.

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} -(x-2) = +4$$

پاسخ:

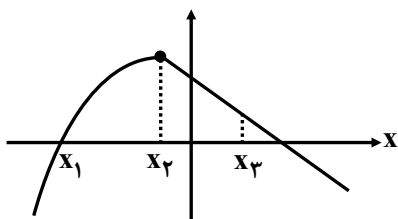
$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x^2 - 4) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$$

مشاهده می کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع  $f$  در  $x = -2$  مشتق ندارد.

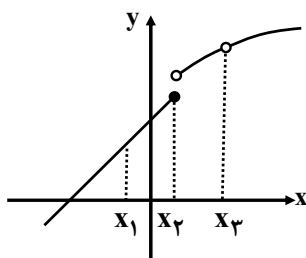


۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست.

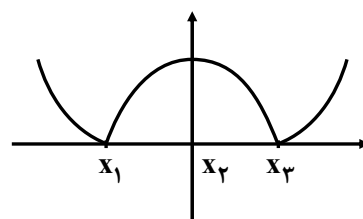
پاسخ:



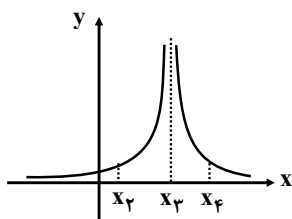
در  $x_2$  مشتق پذیر نیست.  
نقاط گوشه



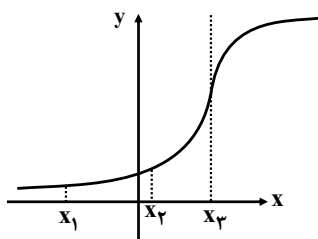
در  $x_2$  و  $x_3$  مشتق پذیر نیست.  
نقاط ناپیوسته



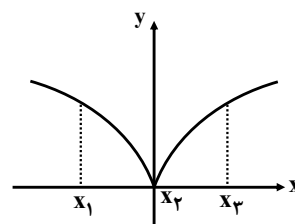
در  $x_1$  و  $x_3$  مشتق پذیر نیست.  
نقاط گوشه‌ای



در  $x_3$  مشتق پذیر نیست.  
(نقطه ناپیوستگی)



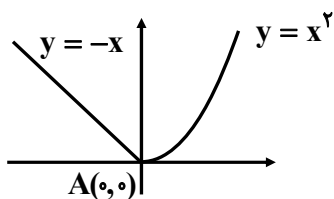
در  $x_3$  مشتق پذیر نیست.  
(مشتق نامتناهی)



در  $x_2$  مشتق پذیر نیست.  
مشتق نامتناهی

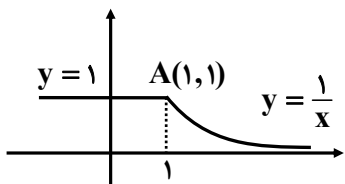
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه  $A$ ، نشان دهید که این توابع در نقطه  $A$  مشتق پذیر نیستند.

پاسخ:



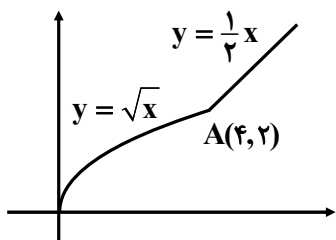
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = 0 \\ f'_-(0) = -1 \end{cases} \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -1, \quad f'_-(1) = 0 \rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

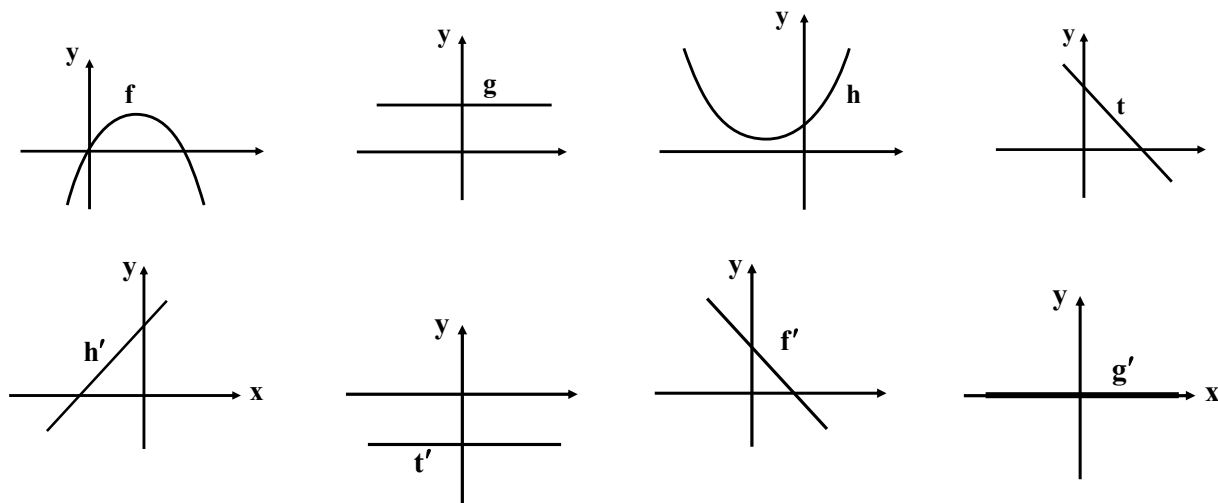


$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x & x > 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x < 4 \\ \frac{1}{2} & x > 4 \end{cases}$$

$$f'_+(4) = \frac{1}{4}, \quad f'_-(4) = \frac{1}{2} \rightarrow f'_+(4) \neq f'_-(4)$$

۲۲- نمودار توابع  $f, g, h$  و  $t$  را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:

(۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور  $x$  ها قرار می‌گیرد.(۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور  $x$  ها قرار می‌گیرد.(۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور  $x$  ها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱) f(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$$

$$۲) f(x) = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2)$$

$$f'(x) = (4x)(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-2x + 7)$$

$$۳) f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(3x+1) - (3)(x^2-4)}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 12}{(3x+1)^2}$$

$$۴) f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$f'(x) = \frac{0(x-4) - (1)(1)}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)^2}$$

$$۵) f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$$

$$f'(x) = 8\left(\frac{-3(x^2+5) - (2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}\right)\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7$$



$$۶) f(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(1)(2x^2 + x - 1) - (x)(4x + 1)}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$۷) f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$$

$$f'(x) = (6x)(2x - 5)^2 + (3x^2 - 4)(2)(2x - 5)^1 = (2x - 5)(24x^2 - 30x - 16)$$

$$۸) f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x)$$

$$۹) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(-3x + 2) - (-3)(x^2 - 3x + 1)}{(-3x + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(-3x + 2)^2}$$

$$۱۰) f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۲۴- اگر  $f$  و  $g$  توابع مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3$ ،  $f'(2) = 5$  و  $g(2) = 8$  و  $g'(2) = -6$  مقدار  $(fg)'(2)$  و  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(2) = f'(2)g(2) + f(2).g'(2) = 5 \times 8 + 3 \times (-6) = 40 - 18 = 22$$

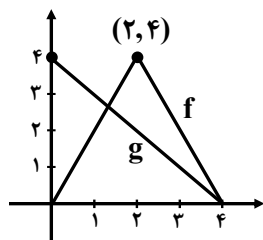
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2).g(2) - g'(2).f(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times 8 - 3 \times (-6)}{8^2} = \frac{40 + 18}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

۲۵- اگر  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 5$  مطلوب است،  $(f+g)'(1)$  و  $(3f+2g)'(1)$ .

پاسخ:

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$$



۲۶- نمودار توابع  $f$  و  $g$  را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر  $h(x) = f(x) - g(x)$  مطلوب است  $h'(1)$ ,  $h'(2)$  و  $h'(3)$

ب) اگر  $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  مطلوب است  $k'(1)$ ,  $k'(2)$  و  $k'(3)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع  $f$  و  $g$  را می نویسیم:

$$mf = \frac{0-4}{4-2} = -2 = f'(x), \quad y-0 = (-2)(x-4) \Rightarrow y = -2x+8$$

$$mf = \frac{4-0}{2-0} = 2 = f'(x) \Rightarrow y-0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$$

$$mg = \frac{0-4}{4-0} = -1 \rightarrow y-0 = (-1)(x-4) \Rightarrow y = -x+4$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+8 & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = -x+4$$

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 2 \quad g(1) = 3 \quad g'(1) = -1$$

$$f(2) = 4 \quad f'_+(2) = -2, \quad f'_-(2) = 2 \quad g(2) = 2 \quad g'(2) = -1$$

$$f(3) = 2 \quad f'(3) = -2 \quad g(3) = 1 \quad g'(3) = -1$$

$$h'(1) = f'(1).g(1) + f(1).g'(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

$$h'(2) = \begin{cases} f'_+(2).g(2) + f(2).g'(2) = (-2) \times 2 + 4(-1) = -8 \\ f'_-(2).g(2) + f(2).g'(2) = 2 \times 2 + 4(-1) = 0 \end{cases}$$

در  $x=2$  مشتق پذیر نیست

$$h'(3) = f'(3).g(3) + f(3).g'(3) = (-2) \times 1 + 2(-1) = -4$$

$$k'(1) = \frac{f'(1).g(1) - g'(1).f(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \times 3 - 2 \times (-1)}{3^2} = \frac{8}{9}$$

$$k'_+(2) = \frac{f'_+(2).g(2) - g'(2).f(2)}{g^2(2)} = \frac{-2 \times 2 - 4(-1)}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$$

در  $x=2$  مشتق پذیر نیست.

$$k'_-(2) = \frac{f'_-(2).g(2) - g'(2).f(2)}{g^2(2)} = \frac{2 \times 2 - 4(-1)}{4} = 2$$

$$k'(3) = \frac{f'(3).g(3) - g'(3).f(3)}{g^2(3)} = \frac{-2 \times 1 - 2 \times (-1)}{1^2} = 0$$



تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد  $(f(x) = 7\sqrt{x} + 50)$  به سؤالات زیر پاسخ دهید:الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی  $[0, 25]$  چه قدر است؟

پاسخ:

$$f(25) = 7\sqrt{25} + 50 = 85 \Rightarrow \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = 1/4$$

$$f(0) = 7(\sqrt{0}) + 50 = 50$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{7}{2\sqrt{25}} = \frac{7}{10}, f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در  $x = 25$  بیشتر است.۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله  $h(t) = -5t^2 + 40t$  به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 40t = 0 \Rightarrow -5t(t - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله  $h(t)$  نسبت به  $t$  مشتق بگیریم:

$$V(t) = -10t + 40 \Rightarrow \begin{cases} V(0) = -10(0) + 40 = 40 \\ V(8) = -10(8) + 40 = -40 \end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم  $35 \frac{m}{s}$  و  $-35 \frac{m}{s}$  است.

پاسخ:

$$V = -10t + 40 \Rightarrow \begin{cases} -10t + 40 = 35 \rightarrow -10t = -5 \rightarrow t = \frac{1}{2} \\ -10t + 40 = -35 \rightarrow -10t = -75 \rightarrow t = 7.5 \end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت  $T$  (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

| ساعت $h$       | ۸  | ۹  | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| درجه حرارت $T$ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۷ | ۱۹ | ۱۸ | ۱۷ | ۱۵ | ۱۳ | ۱۰ | ۹  |

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(8) = 11, T(12) = 19 \Rightarrow \frac{19 - 11}{12 - 8} = \frac{8}{4} = 2$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پاسخ:

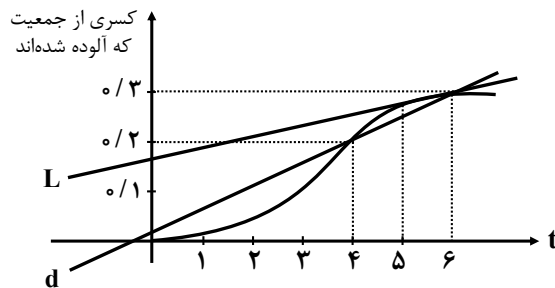
$$T(12) = 19, T(18) = 9 \rightarrow \frac{9 - 19}{18 - 12} = -1/6$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.



۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط  $L$  و  $d$  چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های  $t=1$  و  $t=2$  یا  $t=3$  بیشتر است؟

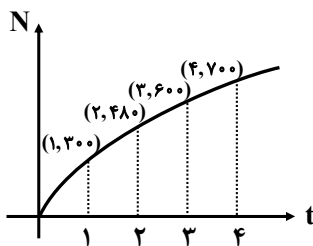
پاسخ: در  $t=3$  شیب فط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای  $t=4$ ،  $t=5$  و  $t=6$  بررسی کنید.

پاسخ: در  $t=6$  از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا ( $N$ ) پس از ضرب  $t$  میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر  $N$  برحسب  $t$  را وقتی  $t$  از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(1) - N(0)}{1 - 0} = \frac{300 - 0}{1} = 300, \quad \frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{480 - 300}{1} = 180,$$

$$\frac{N(3) - N(2)}{3 - 2} = \frac{600 - 480}{1} = 120, \quad \frac{N(4) - N(3)}{4 - 3} = \frac{700 - 600}{1} = 100.$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر  $t$  افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لفظه‌ای در حال کاهش است) (تعقر روی به پایین است).

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  برحسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$  ( $t$  برحسب ثانیه) داده شده

است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 10 \\ f(5) = 5^2 - 5 + 10 = 30 \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط} = \frac{30 - 10}{5 - 0} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = \text{سرعت متوسط} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$



۳۳- تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود.  $f(t)$  نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان  $t$  است. برخی از مقادیر  $f(t)$  در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

| ثانیه $t$  | ۰  | ۰/۱  | ۰/۲  | ۰/۳  | ۰/۴  | ۰/۵  | ۰/۶  |
|------------|----|------|------|------|------|------|------|
| متر $f(t)$ | ۱۱ | ۱۲/۴ | ۱۳/۸ | ۱۵/۱ | ۱۶/۳ | ۱۷/۴ | ۱۸/۴ |

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این که سرعت توپ را در  $t = ۰/۴$  به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های  $[۰/۳, ۰/۴]$  و  $[۰/۴, ۰/۵]$  به دست آوریم.

$$۱) \frac{f(۰/۵) - f(۰/۴)}{۰/۵ - ۰/۴} = \frac{۱۷/۴ - ۱۶/۳}{۰/۱} = \frac{۱/۱}{۰/۱} = ۱۱$$

$$۲) \frac{f(۰/۴) - f(۰/۳)}{۰/۴ - ۰/۳} = \frac{۱۶/۳ - ۱۵/۱}{۰/۱} = \frac{۱/۲}{۰/۱} = ۱۲$$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۱ + ۱۲}{۲} = ۱۱/۵$$

۳۴- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند  $f$  در بازه  $[۰, ۱]$  همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع  $y = x^3$  و از  $(۰, ۰)$  و  $(۱, ۱)$  می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۱) - f(۰)}{۱ - ۰} = \frac{۱ - ۰}{۱ - ۰} = ۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای: } f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(۰) = ۰$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند  $y = \sqrt{x}$  تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقریبش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم  $f'(\alpha) = ۰$  و  $f(\alpha) = ۰$

پاسخ: نادرست است. تابع  $y = x^3$  در نظر بگیرید.

$$f(۰) = ۰$$

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(۰) = ۰$$

۳۵- یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $3 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$m(4) = \sqrt{4} + 2 \times 4^3 = ۱۳ \Rightarrow ۱۳۰ - ۵۵/۷ = ۷۴/۳$$

$$m(3) = \sqrt{3} + 2 \times 3^3 = ۵۵/۷$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t = 3$  چه قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + ۵۴$$



۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه  $t = 0$  سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس

از  $t$  ثانیه از رابطه  $V = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$  به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی  $[0, 1]$  چه قدر است؟

پاسخ:

$$V(0) = 40\left(1 - \frac{0}{100}\right)^2 = 40, \quad V(1) = 40\left(1 - \frac{1}{100}\right)^2 = 39/204 \Rightarrow \bar{V} = \frac{39/204 - 40}{1 - 0} = -0/796$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 100]$  می‌شود؟

پاسخ:

$$V' = 40 \times 2\left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{-8}{10}\left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

$$\begin{cases} V(0) = 40 \\ V(100) = 40 \times \left(1 - \frac{100}{100}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{V} = \frac{0 - 40}{100 - 0} = -\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{10} + \frac{0/8t}{100} = -\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{8t}{1000} = \frac{4}{10} \Rightarrow t = 50$$