

# فصل سوم : تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

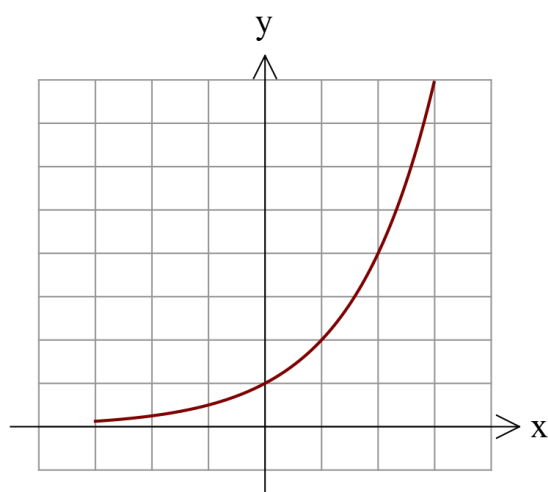
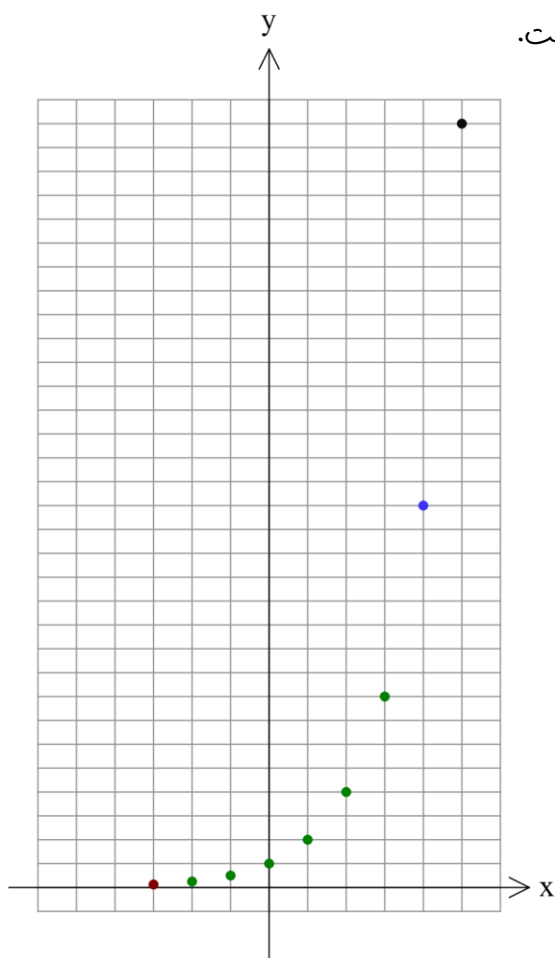
اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار زیر را خواهیم داشت.

حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

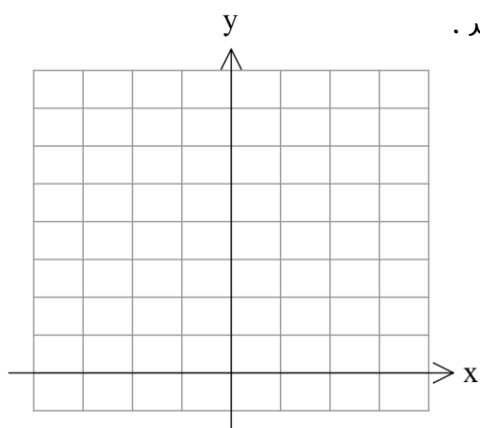
به عنوان مثال :

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1/46 \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \approx 1/4 \quad 2^{1/6} = 2/66$$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



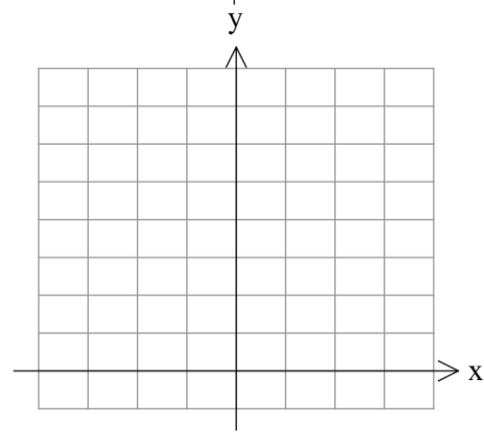
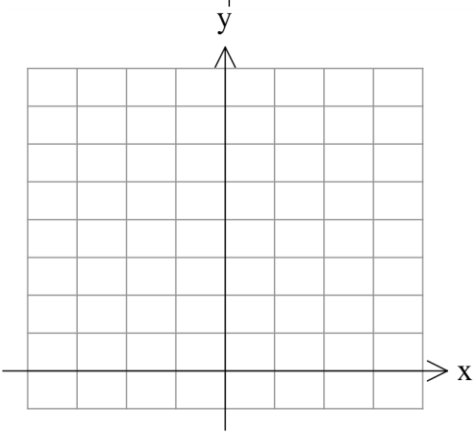
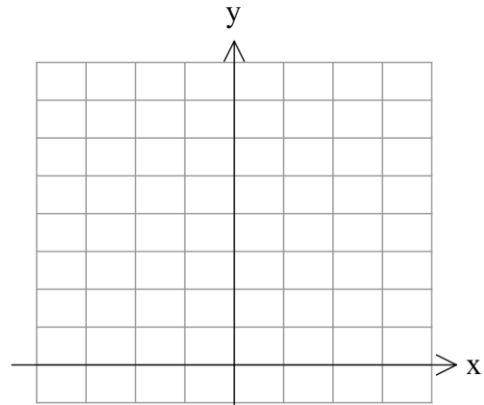
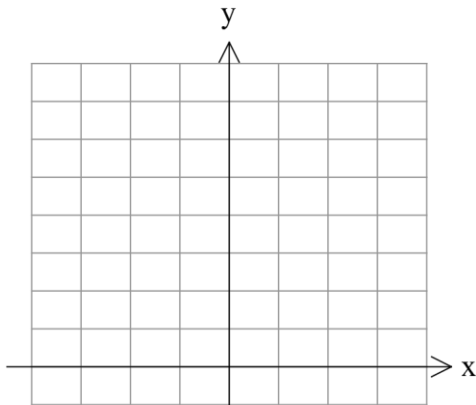
حالا به کمک ماشین حساب و نقطه یابی نمودار تابع  $y = (\frac{1}{2})^x$  را رسم کنید .



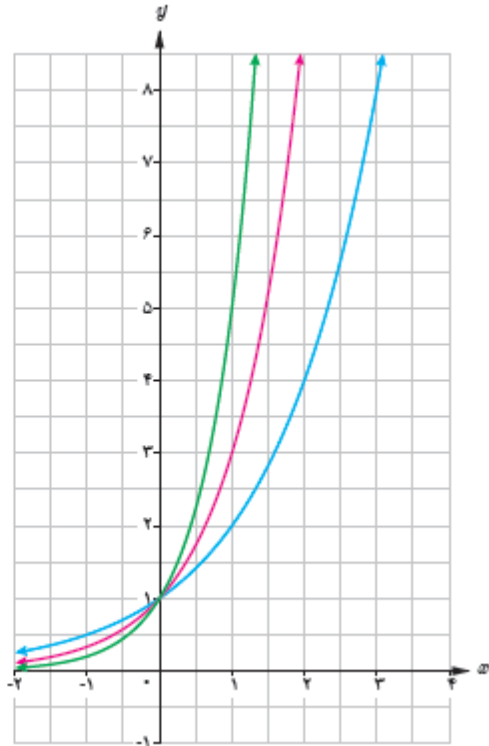
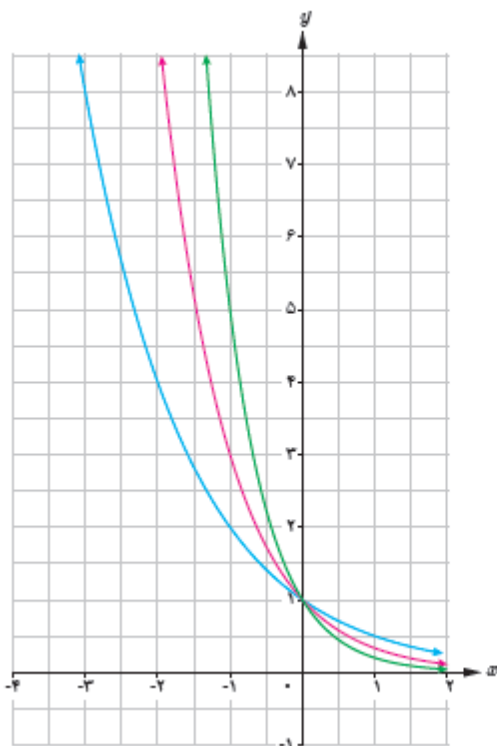
تابع نمایی : هر تابع به صورت  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) را تابع نمایی می گویند .

توجه : هر تابع به صورت  $y = ka^x$  ( $a > 0, a \neq 1, k \neq 0$ ) رفتار نمایی دارد .

تمرین: نمودار توابع  $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ ,  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$ ,  $y = 3^{x-1}$ ,  $y = -3^x - 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.



تمرین: نمودار توابع  $3^x$ ,  $5^x$  و همچنین توابع  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,  $\left(\frac{1}{5}\right)^x$  رسم شده است. ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید.



تمرین: مقدار نوعی باکتری خاص در هر ساعت ۴ برابر می شود اگر مقدار اولیه آن ۲۰ میلی گرم بوده باشد، جرم توده بعد از  $t$  ساعت را به صورت نمایی نوشته و مقدار آن را بعد از یک شبانه روز تخمین بزنید.

تمرین: اگر  $a, b, c$  دنباله حسابی باشند. کدام مورد درست است؟ (راهنمایی: در دنباله حسابی  $a + c = 2b$ )

الف)  $3^a, 3^b, 3^c$  دنباله حسابی است.      ب)  $3^a, 3^b, 3^c$  دنباله هندسی است.

ج)  $3^a, 3^{b+1}, 3^c$  دنباله حسابی است.      د)  $3^a, 3^{2b}, 3^c$  دنباله هندسی است.

معادله و نامعادله نمایی:

الف) اگر  $a^x = a^y$  آنگاه  $x = y$

ب) اگر  $a > 1$  در این صورت اگر  $a^x > a^y$  آنگاه  $x > y$ .

ج) اگر  $0 < a < 1$  در این صورت اگر  $a^x > a^y$  آنگاه  $x < y$ .

تمرین: معادله و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{81}{16}\right)^{x-1} \quad \text{الف)}$$

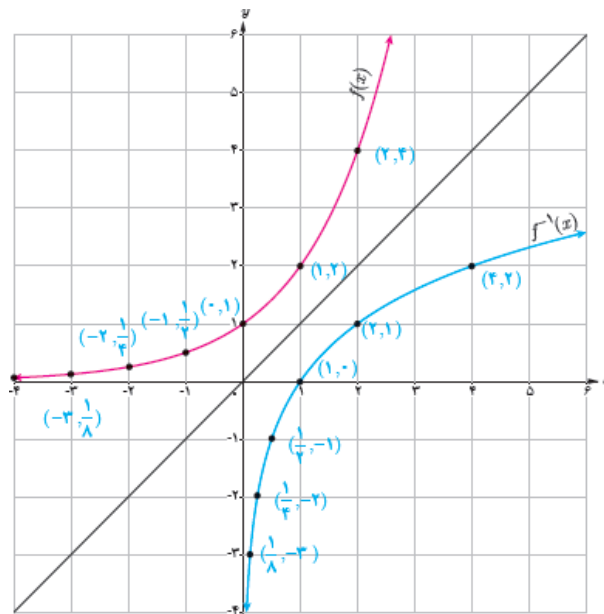
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} > \left(\frac{1}{27}\right)^x \quad \text{ب)}$$

$$9^{2x-2} > \frac{1}{243} \quad \text{ج)}$$

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت  $f(t) = 2^t$  است. ور به راحتی می توان گفت در زمان  $t = 2/5$  مقدار این باکتری حدود  $f(2/5) = 2^{2/5} \approx 5/66$  است. حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریباً ۶۰ می شود، چه باید کرد؟

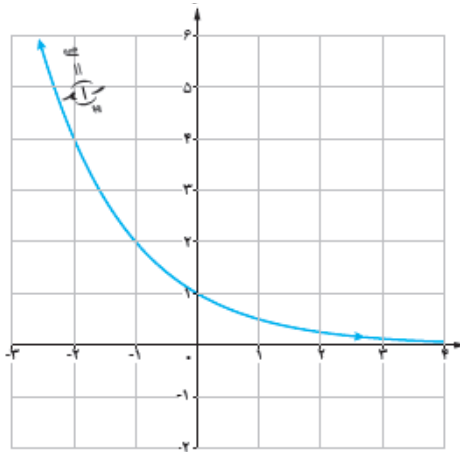
همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط  $y = x$  رسم کرد پس:



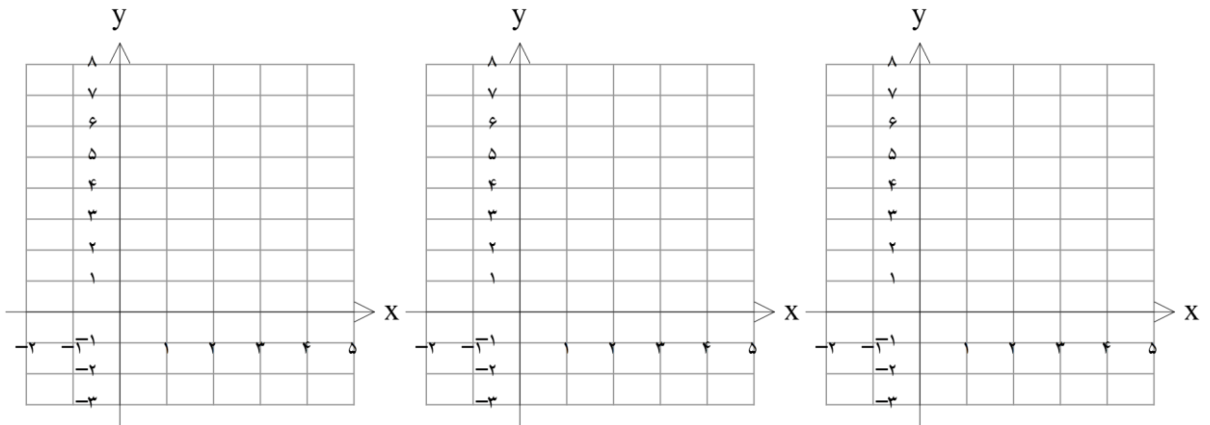
تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی  $y = a^x$  را تابع لگاریتم بر مبنای  $a$  می نامند و با نماد  $y = \log_a^x$  نمایش می دهند. که در آن  $a > 0, a \neq 1, x > 0$  است.

تمرین: دامنه تابع  $y = \log_x^{x-x}$  را مشخص کنید.

تمرین: به کمک نمودار تابع  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  را رسم کنید.

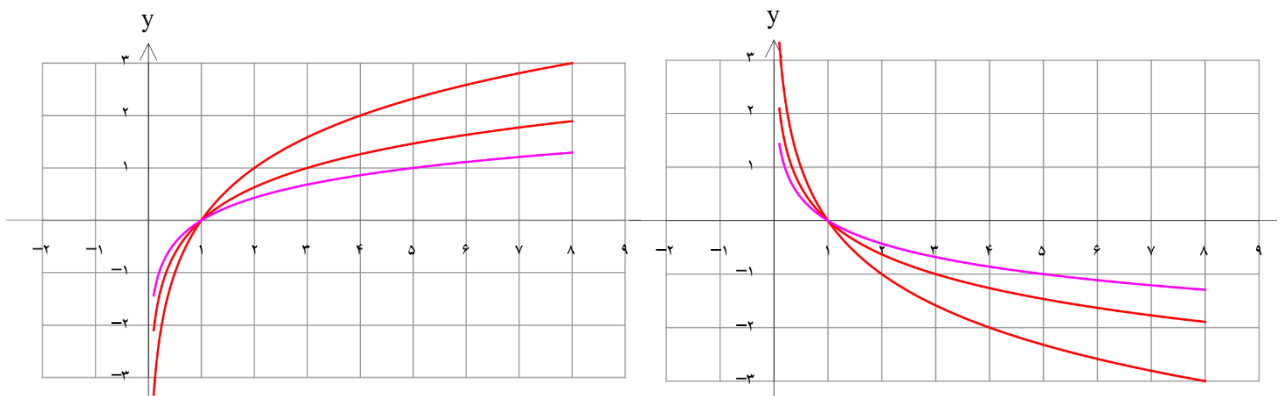


تمرین: نمودار توابع  $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ ,  $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$ ,  $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.



تمرین: نمودار توابع  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  و همچنین توابع  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  را رسم شده

است. ضابطه هر کدام را در کنار نمودار مربوطه بنویسید.



تمرین: با توجه به نمودار لگاریتم در ابتدای این درس، توان های صحیح عدد ۲ را بدست آورید:

$$\log_2^{2^{-2}} = \quad \log_2^{2^{-1}} = \quad \log_2^{2^0} = \quad \log_2^{2^1} = \quad \log_2^{2^2} = \quad \log_2^{2^3} = \quad \log_2^{2^4} =$$

تعریف لگاریتم: به طور کلی تعریف لگاریتم به صورت زیر است:

$$x = a^y \Leftrightarrow \log_a^x = y$$

تمرین: مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\log_2^8 = \quad \log_2^{\frac{1}{256}} = \quad \log_{10}^{1000} =$$

$$\log_5^{\sqrt{125}} = \quad \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{25}{5}} = \quad \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

تمرین: تساوی توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید.

$$\log_5^{\frac{1}{625}} = -4 \Rightarrow \quad \log_2^1 = 0 \Rightarrow$$

$$3^4 = 243 \Rightarrow \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024} \Rightarrow$$

تمرین: اگر  $f(x) = \log_3^{(x-1)}$  مقدار  $f^{-1}(3)$  چقدر است؟ (راهنمایی: در واقع مقدار  $y$  داده شده و  $x$  را می خواهید)

تمرین: اگر  $f(x) = 3^{5x-1}$ ، ضابطه  $f^{-1}(x)$  را بیابید.

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم :

$$\log_a 1 = 0 \quad (1)$$

اثبات : چون همواره  $a^0 = 1$

$$\log_a a = 1 \quad (2)$$

اثبات : چون همواره  $a^1 = a$

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y \quad (3)$$

اثبات : فرض کنید  $\log_a^x = p$  و  $\log_a^y = q$  در این صورت  $x = a^p, y = a^q$ . پس داریم  $xy = a^{p+q}$  و طبق تعریف

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y = p + q \quad \text{لگاریتم در نتیجه}$$

مثال : اگر  $\log_3^2 = 1/58$  و  $\log_3^4 = 2/32$  باشد . مقدار  $\log_3^{10}$  را بیابید .

$$\text{حل : } \log_3^{10} = \log_3^2 + \log_3^4 = 1/58 + 2/32 = 3/9$$

$$\log_a^{x/y} = \log_a^x - \log_a^y \quad (4)$$

اثبات :

مثال : اگر  $\log_3^2 = a$  مقدار  $\log_3^{10}$  را بیابید . ( وقتی مبنای لگاریتم ۱۰ باشد معمولا آن را نمی نویسند )

$$\text{حل : } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$



$$\log_a^{x^n} = n \log_a^x \quad (5)$$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت  $\frac{1}{3} \log 16 + 2 \log 5$  را بیابید .

$$\frac{1}{3} \log 4^2 + \log 5^2 = 2 \times \frac{1}{3} \log 4 + \log 25 = \log 4 + \log 25 = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \quad \text{حل :}$$

$$\log_a^{x^n} = \frac{1}{n} \log_a^x \quad (6)$$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت  $\log_{\sqrt{3}}^{138}$  چقدر است ؟

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{138} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \log_{\sqrt{3}}^{138} = \sqrt{3} \log_{\sqrt{3}}^{138} = 2 \log_{\sqrt{3}}^{138} = 2 \times 2 \log_3^{138} = 4 \times 2 \log_3^3 = 16 \quad \text{حل :}$$

$$\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a} \quad (7) \quad (\text{قاعده تغییر مبنا})$$

اثبات : اگر  $\log_b^x = p, \log_b^a = q$  آنگاه  $x = b^p, a = b^q$  و می توان نوشت :

$$x = b^p = (b^q)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow x = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \log_a^x = \frac{p}{q} \Rightarrow \log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

$$\log_a^x = \frac{1}{\log_x^a} \quad \text{نتیجه ۱ :}$$

$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a \quad \text{نتیجه ۲ :} \quad (\text{می توان به تعداد بیشتر نیز تعمیم داد})$$

مثال: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  مقدار  $\log_6 18$  را بیابید.

حل: 
$$\log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} = \frac{\log 2 \times 3}{\log 2 \times 3} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{b + (a - a)}{a + b} = \frac{b - a + a}{b + a}$$

۸)  $b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$

اثبات:

مثال: حاصل  $2^{(1+\log_2 5)}$  چقدر است؟

حل: 
$$2^{(1+\log_2 5)} = 2^1 \times 2^{\log_2 5} = 2 \times 2^{\log_2 5} = 2 \times 5^{\log_2 2} = 2 \times 5 = 10$$

تمرین: مقدار  $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[9]{3}$  را بیابید.

تمرین: مقدار  $\frac{1}{\log_6 5} + \frac{1}{\log_6 9}$  را حساب کنید.

تمرین: مقدار  $3^{\log_3 9}$  را بدست آورید.

تمرین: حاصل عبارت  $\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100}$  چیست؟

تمرین: اگر  $\log 2 = a$  باشد حاصل  $\log \sqrt[5]{25}$  چقدر است؟

تمرین: مقدار عبارت  $\log_{\sqrt[5]{2}}^5 + 2 \log_{\sqrt[5]{2}}^2$  را بیابید.

تمرین: حاصل عبارت  $\log_{\sqrt[5]{2}}^2 \times \log_{\sqrt[5]{2}}^3 \times \log_{\sqrt[5]{2}}^4 \times \dots \times \log_{\sqrt[5]{2}}^{25}$  را بیابید.

معادله و نامعادله لگاریتمی :

الف) اگر  $\log_a^x = \log_a^y$  آنگاه  $x = y$ .

ب) اگر  $\log_a^x = b$  می توان از تعریف لگاریتم برای حل معادله بهره برد.

ج) اگر  $a > 1$  در این صورت اگر  $\log_a^x > \log_a^y$  آنگاه  $x > y$ .

د) اگر  $0 < a < 1$  در این صورت اگر  $\log_a^x > \log_a^y$  آنگاه  $x < y$ .

توجه توجه !!! : در حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی باید به دامنه تابع لگاریتمی نیز توجه داشت و جواب هایی قابل

قبول خواهند بود که در دامنه لگاریتم باشند.

تمرین: معادله  $x^2 - x^{\log_2^2} = 0$  را حل کنید.

تمرین: معادله  $\log_x^{x-2} + \log_x^{2x-2} = 2$  را حل کنید.

تمرین: معادله  $\log(x-10) + 2\log x = 1 + \log(x+1)$  را حل کنید.

تمرین: معادله  $\log_x^{(x^2-2x)} = 2$  چند جواب دارد؟

تمرین: معادله  $\log_{\frac{x}{2}}^{(x-1)} + \log_{\frac{x}{2}}^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 2$  را حل کنید.

تمرین: مجموعه جواب نامعادله  $\log_{\frac{x}{2}}^{(2x-1)} < 1 + \log_{\frac{x}{2}}^x$  را بیابید. (به دامنه دو لگاریتم نیز دقت کنید)

کاربرد های لگاریتم :

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند از تابع نمایی  $f(t) = a(1+r)^t$  تبعیت می کنند که در آن  $a$  مقدار اولیه آن چیز و  $r$  درصد افزایش یا کاهش ( در صورت کاهش  $r$  عدد منفی می شود ) در هر دوره است .

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد  $f(35) = 30(1/02)^{35} = 30 \times 2 = 60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید  $100 = 30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3} = (1/02)^t \Rightarrow t = \log_{1/02} \frac{10}{3} \approx 60/8$

تمرین : فرض کنید قیمت یک نوع خودرو خاص سالانه ۳۰ درصد افت قیمت دارد و قیمت فعلی آن ۸۰ میلیون تومان است . بعد از چند سال قیمت آن حدود ۶۵ میلیون تومان خواهد بود ؟

تمرین : با نرخ سود ۱۶ درصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

نکته : در بانک ها برای دقت بیشتر از نرخ رشد روزشمار استفاده می شود که فرمول آن  $f(t) = a(1 + \frac{r}{365})^{365t}$

۲) شدت زلزله: اگر انرژی آزاد شده از زلزله بر حسب ارگ (Erg) را  $E$  و شدت زلزله بر حسب ریشتر را  $M$  در نظر

$$\log E = 11/8 + 1/5M \quad (\text{ارگ برابر } 10^{-7} \text{ ژول است})$$

تمرین: انرژی آزاد شده از زلزله ای ۶ ریشتری چقدر است؟

۳) قدمت و نیمه عمر: اگر یک ماده در مدت ثابتی نصف شود آن دوره را نیمه عمر آن ماده می گویند اگر نیمه عمر را با  $a$

نمایش دهیم، در این صورت در مدت زمان  $t$  به تعداد  $\frac{t}{a}$  بار جرم ماده نصف شده است و کسر باقی مانده از ماده را می

توان از رابطه زیر بدست آورد:  $(\frac{1}{2})^{\frac{t}{a}} = b$  (کسر باقی مانده در واقع نسبت مقدار ثانویه به مقدار اولیه است)

نمونه: نوعی ایزوتوپ کربن به نام کربن ۱۴ در موجودات وجود دارد که پس از مرگشان شروع به از بین رفتن می کند و

نیمه عمر آن حدود ۵۷۳۰ سال است که از آن برای تخمین قدمت یک فسیل استفاده می شود.

تمرین: فسیلی یافت شده که مقدار کربن ۱۴ باقی مانده از آن فقط ۲۰ درصد مقدار اولیه است. قدمت این فسیل را

تخمین بنزید.

تمرین: نیمه عمر نوعی ماده هسته ای ۱۵ سال است. اگر جرم اولیه این ماده ۱۵۰ گرم بوده باشد. پس از ۷۰ سال جرم

باقی مانده آن چقدر است؟

تمرین: تمرین های صفحه ۹۰ را حل کنید.