

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

درس دوم : انواع تابع

درس سوم : وارون تابع

درس چهارم : اعمال ترکیبی تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

تایع : یک تابع از مجموعه A به مجموعه B یک رابطه بین دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود . A را دامنه و B را هم دامنه تابع می گویند . (هم دامنه در واقع هر مجموعه دلخواه شامل برد را می گویند)

تمرین : تمام توابع از مجموعه $A = \{1, 2\}$ به $B = \{a, b\}$ را بنویسید . (از نمودار پیکانی استفاده کنید)

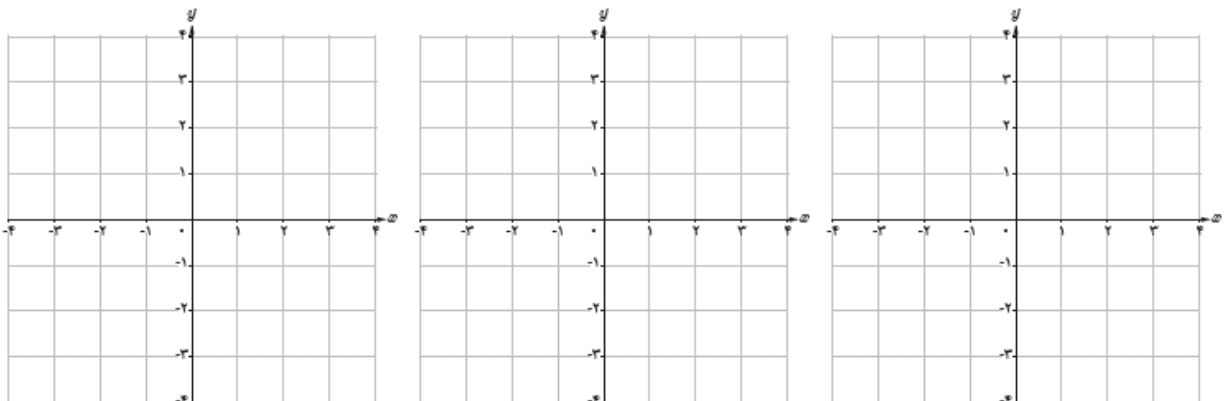
تمرین : از یک مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی ، چند تابع می توان نوشت ؟ چرا ؟

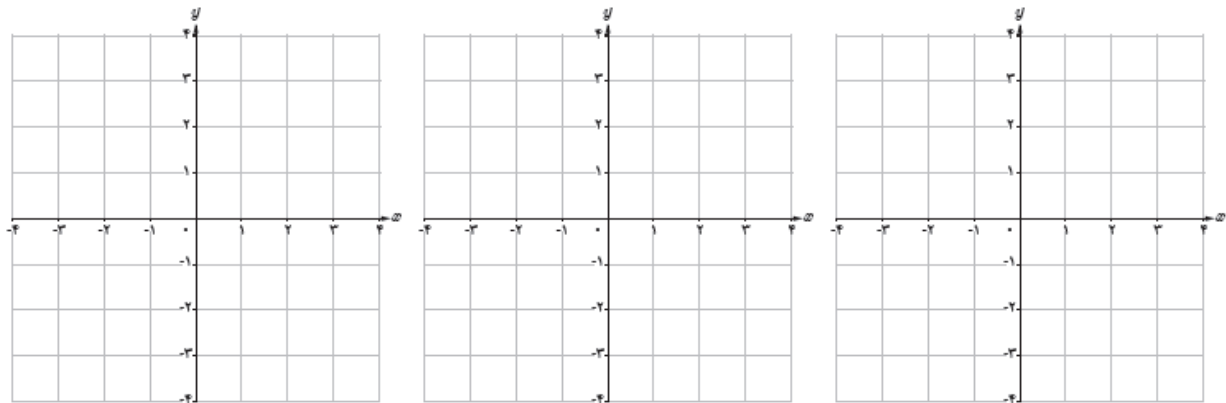
توجه : برای مشخص بودن یک تابع باید حتماً دامنه ، هم دامنه و ضابطه تابع مشخص باشد . اگر برای تابعی دامنه و هم دامنه بیان نشده باشد دامنه آن بزرگ ترین دامنه ممکن خواهد بود و هم دامنه نیز هر مجموعه ای شامل برد .

مثال : تابع با ضابطه با دامنه $[-1, 2]$ و برد $(2, 8]$ را می توان به صورت های زیر نمایش داد .

$$\begin{cases} f : (-1, 2] \rightarrow R \\ f(x) = 2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f : (-1, 2] \rightarrow (2, 8] \\ f(x) = 2x^2 \end{cases}$$

تمرین : تابع $y = 3x, y = x^2$ را با دامنه های $R, [-1, 2], \{-1, 0, 1, 2\}$ رسم کنید . برد هر کدام را نیز بیابید .





تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم مساوی هستند هرگاه (الف) دامنه هر دو برابر باشد (ب) به ازای هر x از دامنه $f(x) = g(x)$

تمرین : کدامیک از زوج توابع زیر با هم برابرند و کدام یک نیستند . چرا ؟

(الف) $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$

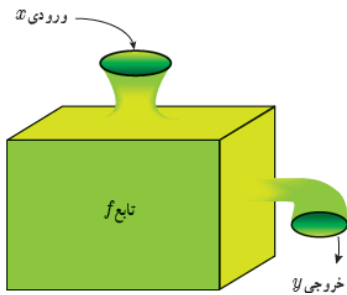
(ب) $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1}$ و $g(x) = 2$

(ج) $f(x) = \sqrt{4x^2}$ و $g(x) = 2x$

(د) $f(x) = x^2$ و $g(x) = x|x|$

$$g(x) = |x^2 - x| \text{ و } f(x) = |x(x-1)| \quad \text{و}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \text{ و } f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad \text{و}$$



مقدار تابع (تابع به عنوان ماشین) :

یک تابع مانند ماشینی عمل می کند که مقداری را به عنوان ورودی دریافت کرده و بعد از انجام چند عملیات روی آن، مقداری را به عنوان خروجی به ما می دهد.

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ چقدر است؟

تمرین: اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$ حاصل $f(2)$ را بیابید.

تمرین: تمرین های صفحه ۴۲ و ۴۳ را حل کنید.

درس دوم : انواع تابع

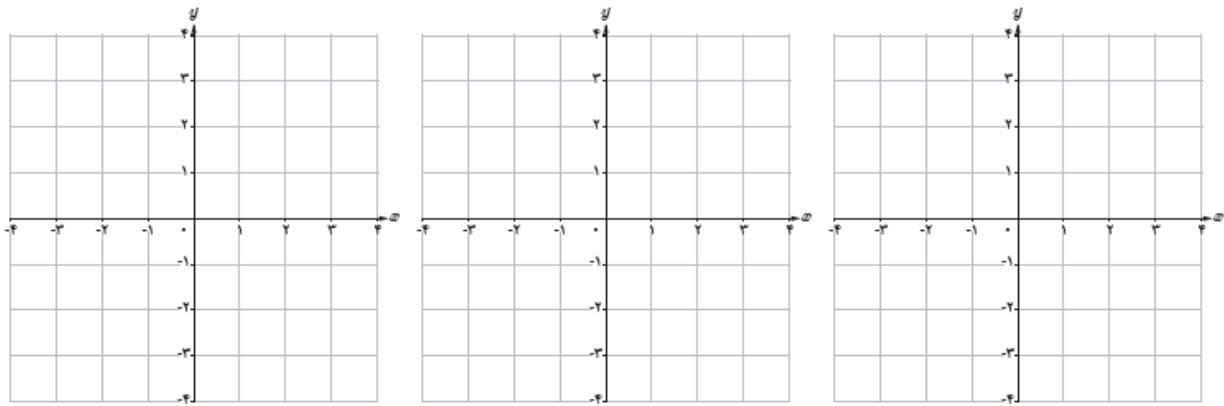
توابع گویا :

توابعی به صورت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که صورت و مخرج چند جمله ای و مخرج مخالف صفر است . مانند :

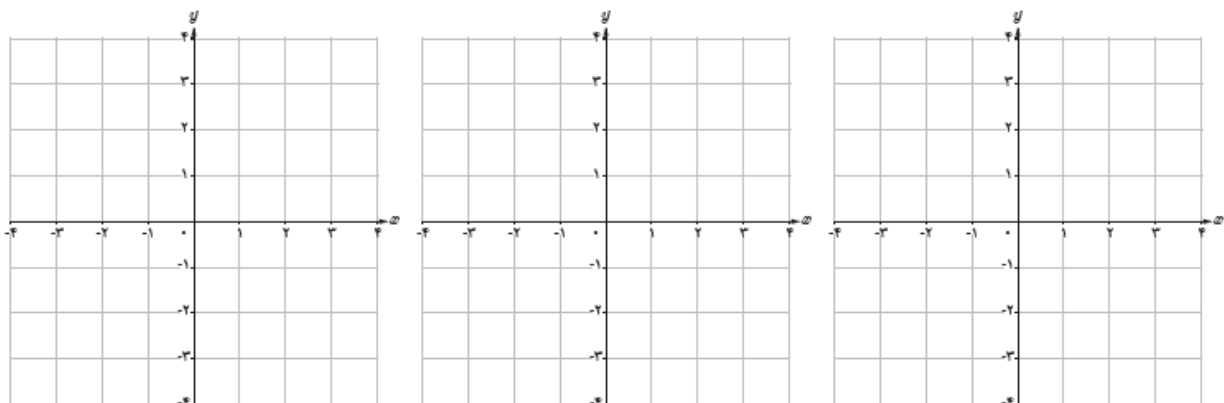
$$f(x) = \frac{5}{x+2} \qquad g(x) = \frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-7x+1} \qquad h(x) = \frac{\sqrt{5}x+2}{x^3+1}$$

دامنه توابع گویا تمام اعداد حقیقی به جز مقادیری است که مخرج را صفر کنند : $D = R - \{x \mid g(x) = 0\}$.
 اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y = \frac{1}{x}$ را در دامنه های $R - \{0\}, R^+, \{1, 2, 3\}$ رسم کنیم .



تمرین : نمودار توابع $y = \frac{1}{x+1}, y = \frac{-1}{x}, y = \frac{1-x}{x}$ را رسم کنید . و برد آنها را بنویسید .



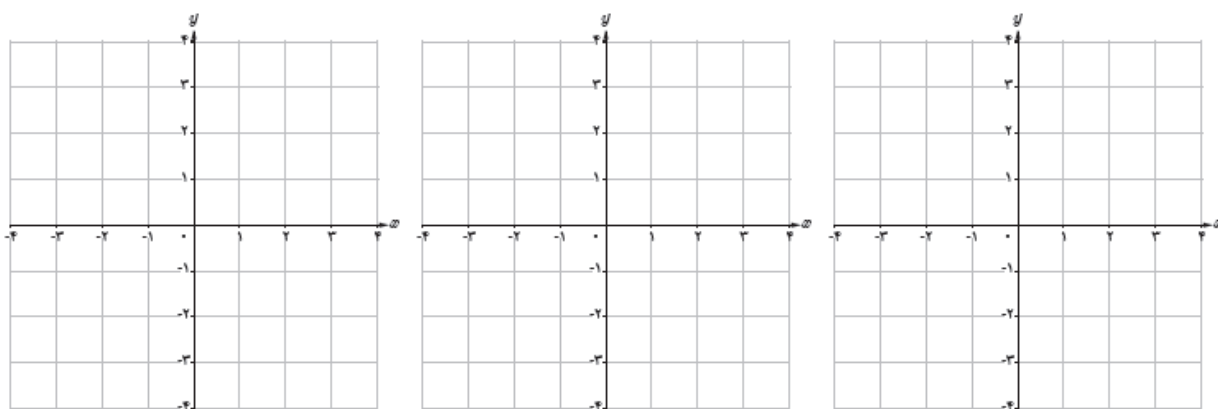
توابع رادیکالی :

توابعی شامل عبارت رادیکالی را توابع گنگ یا رادیکالی می گویند .

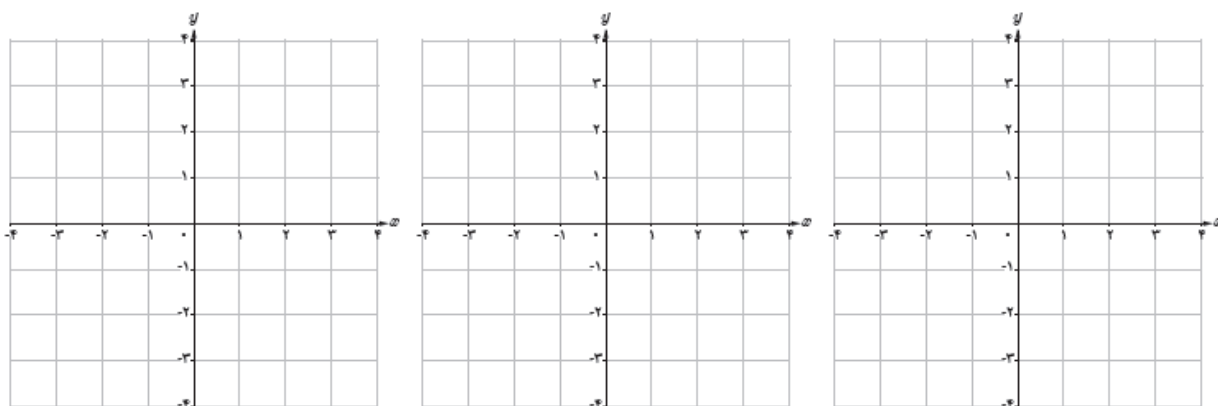
دامنه توابع $y = \sqrt{f(x)}$ اعدادی است که زیر رادیکال را مثبت کند : $D = \{ x | f(x) \geq 0 \}$

اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y = \sqrt{x}$ را در دامنه های $\{1, 2, 3\}, R^+, [1, 4)$ رسم کنیم .

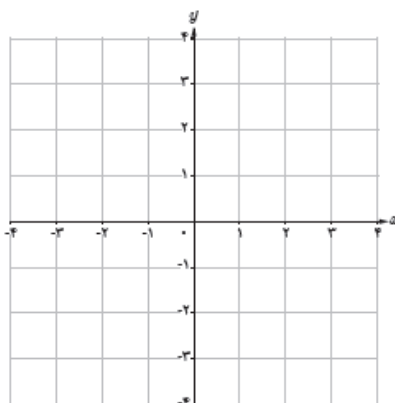


تمرین : نمودار توابع $y = \sqrt{x-2}, y = 1 - \sqrt{x}, y = \sqrt{x+1} - 1$ را رسم کنید . و برد آنها را بنویسید .



تمرین : نمودار تابع زیر را رسم کنید .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$



تمرین : دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x) = \frac{x+2}{2-x}$

ب) $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+2}$

ج) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+5x+6}$

د) $f(x) = \sqrt{2x-2}$

ه) $f(x) = 2\sqrt{x-2}$

و) $f(x) = \sqrt{8-2x}$

ز) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-2}$

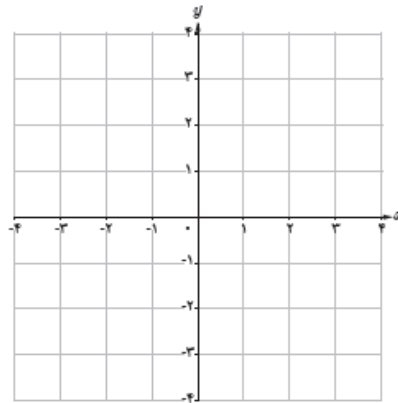
توابع پله ای :

توابعی که از چند تابع ثابت تشکیل شده است را تابع پله ای می نامند.

مثال : هزینه پست برای ارسال بسته های مختلف با توجه به وزن آنها به صورت زیر است .

وزن بسته (کیلوگرم) w	$0 < w \leq 2$	$2 < w \leq 5$	$5 < w \leq 10$	$10 < w \leq 12$
$f(w)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	5	10	17	20

تابع مربوطه را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .



توابع جزء صحیح :

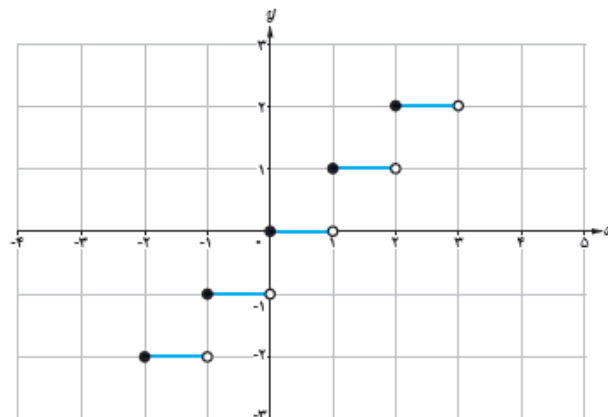
گونه خاصی از تابع پله ای است که کاربرد فراوانی دارد . و به صورت $y = [f(x)]$ تعریف می شود .

جزء صحیح عدد حقیقی x در واقع بزرگ ترین عدد صحیح نا بزرگ تر از x است .

مثال : $[-2] = -2$, $[2/99] = 2$, $[-2/1] = -3$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\frac{-1}{3}] = -1$

مثال : تابع $y = [x]$ در بازه $[-3, 3]$ رسم شده است جدول را کامل کنید . (این تابع دارای دامنه R و برد Z است)

w	$y = [w]$
$-2 \leq w < -1$	$y = -2$
$-1 \leq w < 0$	
$0 \leq w < 1$	
$1 \leq w < 2$	
$2 \leq w < 3$	



تمرین: نمودار تابع $y = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$

$$-2 \leq 2x < -1 \rightarrow [2x] = -2, \quad -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$-1 \leq 2x < 0 \rightarrow [2x] = -1, \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

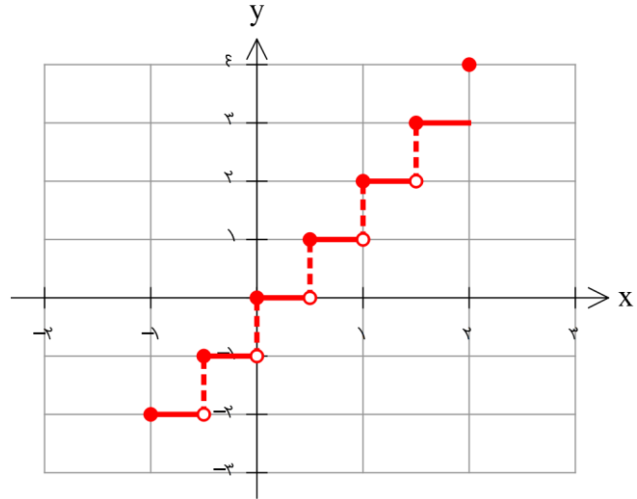
$$0 \leq 2x < 1 \rightarrow [2x] = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \rightarrow [2x] = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

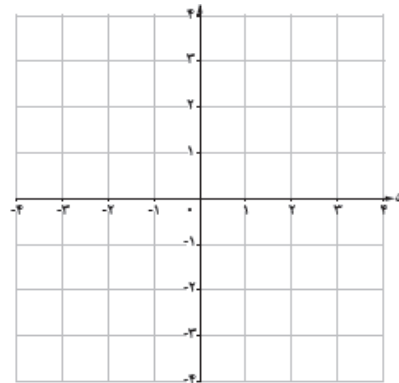
$$2 \leq 2x < 3 \rightarrow [2x] = 2, \quad 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$3 \leq 2x < 4 \rightarrow [2x] = 3, \quad \frac{3}{2} \leq x < 2$$

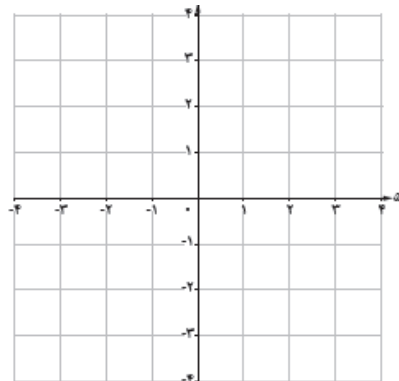
$$2x = 4 \rightarrow [2x] = 4, \quad x = 2$$



تمرین: نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{3} \right]$ را در بازه $[-6, 6)$ رسم کنید.



تمرین: نمودار تابع $y = x + 2[x]$ را در بازه $[-1, 2)$ رسم کنید برد این تابع در دامنه R چیست؟



معادله تابع :

معادلات شامل دو متغیر x و y یک رابطه را نمایش می دهند مثلا $x + y = 1$ مجموعه زوج مرتب هایی است که مجموع مولفه های آن 1 است . نمودار این معادله یک خط است که معمولا به صورت $y = -x + 1$ نمایش می دهند . اما همه معادلات با دو متغیر x و y تابع نیستند و فقط آنهایی تابع خواهند بود که به ازای هر x تنها یک y به ما بدهند .
 مثال : $y = |x| + 1$ تابع است ولی $x = |y| + 1$ تابع نیست زیرا مثلا ض به ازای $x = 2$ مقدار $y = \pm 1$ می دهد .
 مثال : $y = 1$ تابع است زیرا برای هر x یک مقدار y (مقدار 1) را به ما می دهد ولی $x = 1$ تابع نیست زیرا به ازای هر x هر مقداری برای y می دهد . (می توانید در نمودار آنها این مطلب را به وضوح ببینید)

تمرین : کدام یک از روابط زیر تابع و کدام یک تابع نیست ؟ چرا؟

الف) $x^2 + y^2 = 1$

ب) $|x + y| = 1$

ج) $\sqrt{x} + y = 1$

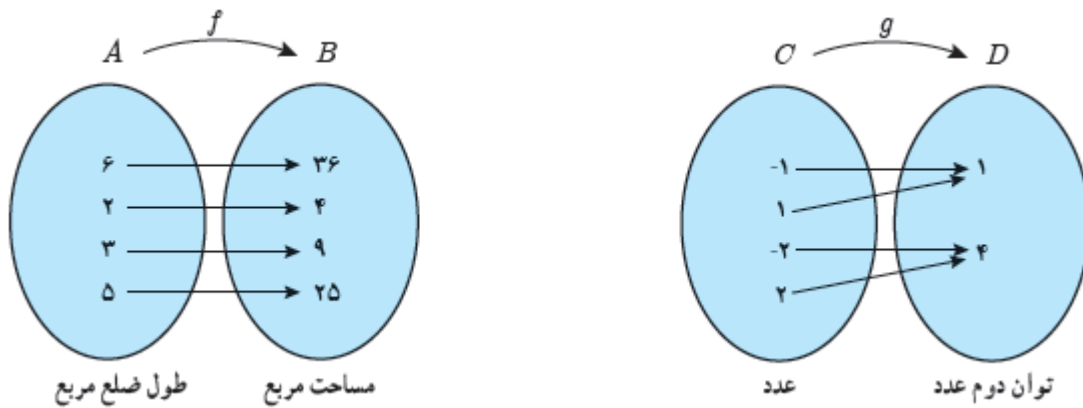
د) $x + \sqrt{y} = 1$

ه) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 2 \\ x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$

و) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

درس سوم : وارون تابع

دو تابع f و g را در نظر بگیرید .



هر دو تابع را به صورت زوج مرتب نوشته سپس جای مولفه ها را عوض کنید .

کدام یک از روابط جدید بدست آمده تابع هستند ؟

تابع وارون :

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهند و به صورت $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ تعریف می کنند . اگر f^{-1} تابع باشد آنگاه f را وارون پذیر و f^{-1} را وارون تابع f می نامند .

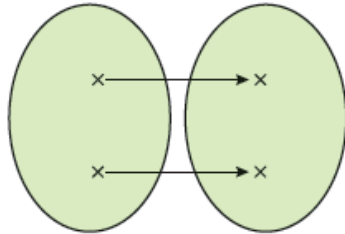
توجه : عدد منفی یک در بالای f صرفاً یک علامت است و به توان منفی نیست پس f^{-1} را با $\frac{1}{f}$ اشتباه نگیریم .

سوال : با توجه به دو تابع ذکر شده در اول درس فکر می کنید یک تابع برای آن که وارون پذیر باشد چه شرایطی باید داشته باشد ؟

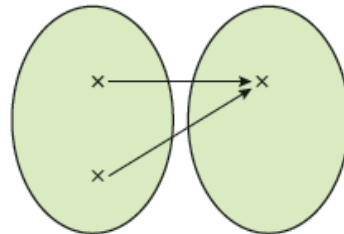
تابع یک به یک :

توابعی وارون پذیر هستند که به هر عضو از برد دقیقاً یک عضو از دامنه نظیر شود. در این صورت تابع را یک به یک می گویند. پس شرط وارون پذیری تابع آن است که تابع یک به یک باشد.

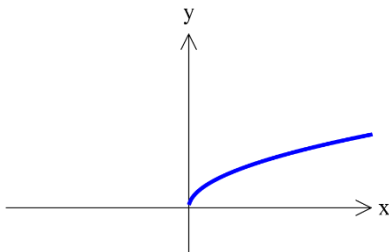
پس از نظر نموداری تابعی یکی به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. چرا؟؟؟



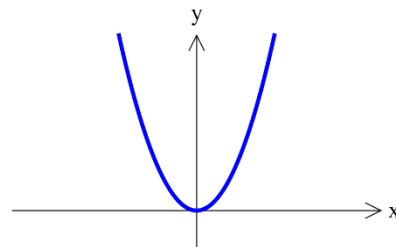
تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.



تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.

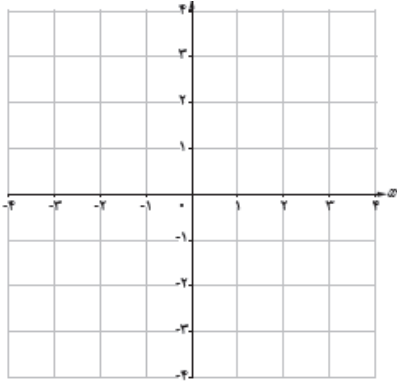
تمرین : تابع $f = \{(a+b, 1), (2, 3), (4, 1), (a-b, 3), (5, 6)\}$ یک به یک است. مقدار a و b را بیابید.

تمرین : اگر $f(x) = x^2 + 2x - 6$ باشد مقدار $f^{-1}(-6)$ را بیابید.

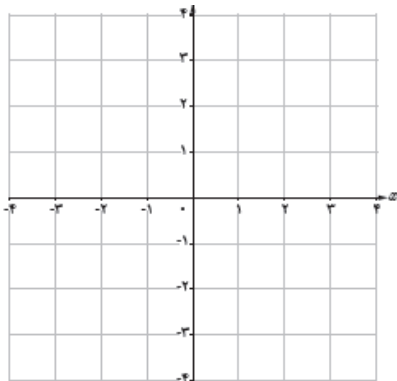
تمرین : دامنه وارون تابع $y = \sqrt{x} - 1$ را بیابید. (توجه : برد تابع f دامنه تابع f^{-1} است)

تمرین: با رسم توابع زیر مشخص کنید کدام یک وارون پذیرند. آنگاه یکی که یکی نیستند را با محدود کردن دامنه یکی به یکی کنید.

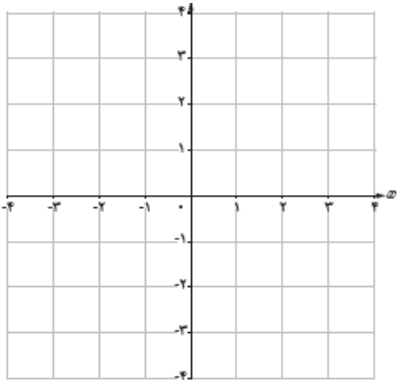
الف) $y = (x + 1)^2$



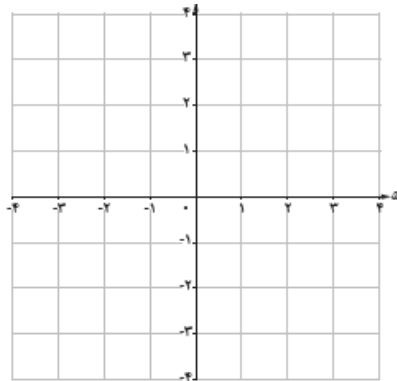
ب) $y = |2 - x|$



ج) $y = -\sqrt{x} + 1$



د) $y = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$



معکوسه وارون یک تابع :

برای نوشتن معادله تابع وارون کفایت در خود تابع x را به صورت تابعی از y بنویسیم و در نهایت می توانیم به جای x علامت $f^{-1}(y)$ را قرار دهیم (همان طور که به جای y علامت $f(x)$ قرار می دهیم) در این صورت y ها همان اعضای دامنه تابع جدید هستند پس می توان برای پرهیز از اشتباهات سهوی ، جای x و y را عوض کنیم .
توجه کنیم که دامنه تابع وارون همان برد تابع اصلی و برد تابع وارون همان دامنه تابع اصلی است .

مثال : وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ را بدست آورید .

$$y = \sqrt{x-1} + 2$$

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{y-2 \geq 0} (y-2)^2 = x-1$$

$$x = (y-2)^2 + 1 \longrightarrow f^{-1}(y) = (y-2)^2 + 1 ; y \geq 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1 ; x \geq 2$$

نکته : می توانستیم برد تابع را از روی نمودار آن بدست بیاوریم و به عنوان دامنه تابع وارون بنویسیم . در ضمن اگر دامنه تابع وارون بدست آمده از ضابطه خود آن مشخص بود نیازی به نوشتن دامنه در کنار آن نبود .

تمرین : وارون توابع زیر را بیابید .

الف) $y = -3x + 2$

ب) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ (برد این تابع $R - \{2\}$ است)

ج) $y = x^2 - 4x$; $x < 2$

$$y = \begin{cases} 3x + 4 & x \leq 1 \\ 2x + 5 & x > 1 \end{cases} \quad \text{د)}$$

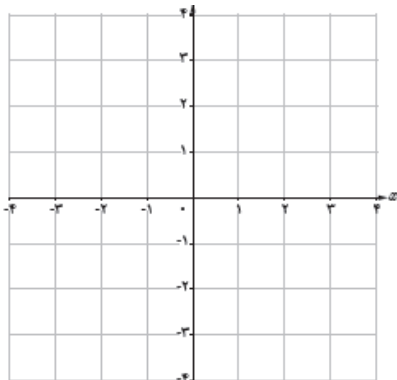
$$y = 2 - \sqrt{x - 1} \quad \text{ه)}$$

تمرین : شرط آنکه تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ خود و ارون باشد (یعنی و ارونش با خودش برابر باشد) چیست ؟

رسم نمودار و ارون تابع :

تابع $y = \sqrt{x - 1}$ را در نظر بگیرید .

الف) ضابطه و ارون آن را بنویسید .

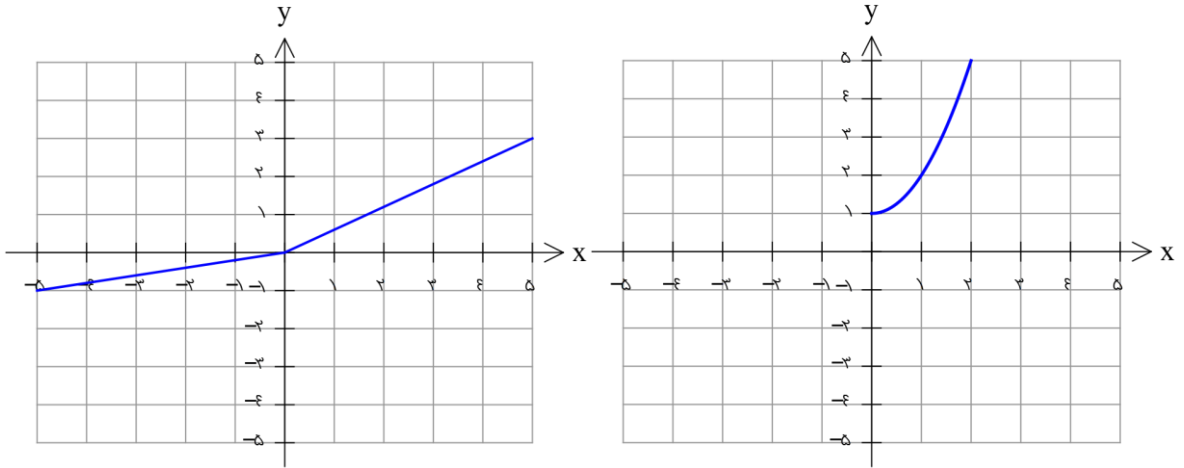


ب) تابع و و ارونش را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ج) حدستان را در مورد ارتباط بین نمودار تابع f و f^{-1} در قالب نتیجه زیر بنویسید ؟

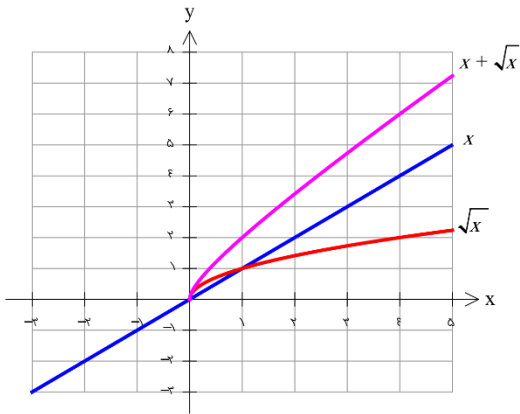
نویسنده : تابع f و f^{-1} نسبت به خط ، هستند بنابراین برای رسم نمودار f^{-1} کافیست قرینه نمودار f را نسبت به خط رسم کنیم .

تمرین : وارون توابع زیر را در همان دستگاه رسم کنید.



تمرین : تمرین های صفحه ۶۲ را حل کنید .

درس چهارم : اعمال روی توابع



همان گونه که اعمال جمع و ضرب در مورد اعداد و چند جمله ای ها انجام می شود در مورد توابع نیز می تواند استفاده شود با این تفاوت که توابع فقط در دامنه های مشترک (دامنه ای که هر دو تابع در آن حضور داشته باشند) می توانند با هم جمع یا ضرب شوند .

اعمال روی توابع :

- | | |
|---------------------------------|--|
| الف) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ | $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ |
| ب) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ | $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ |
| ج) $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ | $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ |
| د) $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ | $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ |

تمرین : اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (2, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(-1, 4), (0, 0), (2, 8), (4, 3)\}$ و $h = \{(1, 2), (3, 7), (-1, -1)\}$ حاصل موارد خواسته شده را بیابید .

الف) حاصل $(f + g)(-1) - (f \cdot h)(1)$ را بیابید .

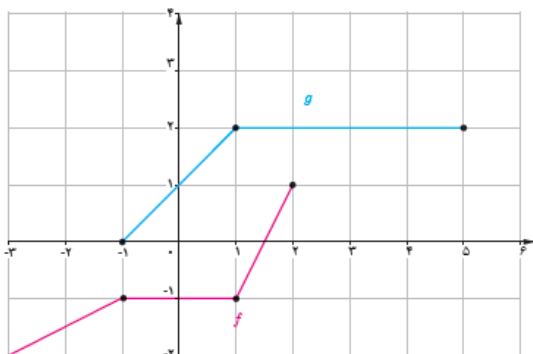
ب) توابع $f - h, f \cdot g, f / g$ را با اعضایشان مشخص کنید .

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{\varepsilon x - x^2}$ و $g = \{(-1, 2), (0, 1), (2, 0), (1, 1)\}$ ، برد تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \frac{x-1}{2x-4}$ و $h(x) = \sqrt{3x+4}$ دامنه توابع $(f+g)(x)$ و $(f \cdot h)(x)$ و $(h/g)(x)$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$ ، ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

(راهنمایی: هر دو تابع را با زیر بازه های $x \geq 2$, $1 < x < 2$, $x \leq 1$ باز نویسی کنید)



تمرین: نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار توابع $f+g$, $f-g$ را در همین دستگاه مختصات رسم کنید.

ترکیب توابع :

به طریق دیگری به جز اعمال روی توابع نیز می توان توابع جدید ایجاد کرد. به مثال زیر توجه کنید :

رابطه $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به سانتی گراد تبدیل می کند .

رابطه $g(x) = x + 273$ درجه سانتی گراد را به درجه کلوین تبدیل می کند .

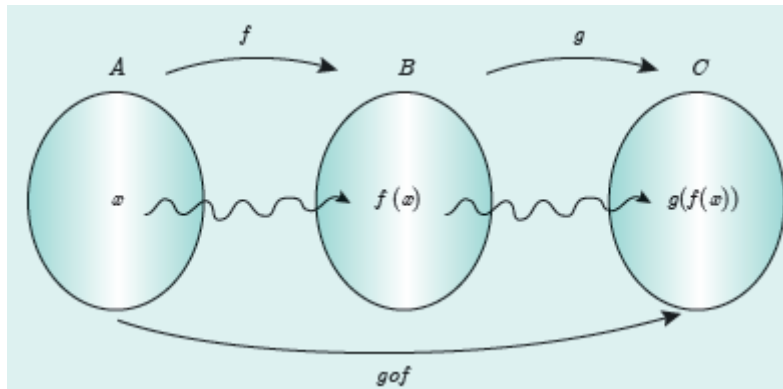
الف) ۱۴ درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل کنید .

ب) اگر x را یک عدد دلخواه به فارنهایت در نظر بگیریم با همان روند قبلی تابعی بنویسید که مستقیم آن را کلوین تبدیل کند .

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g باشد داریم : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

و به طور مشابه می توان $f \circ g$ را تعریف کرد : $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



تمرین : اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (-1, 1), (0, 2)\}$ و $g = \{(1, 1), (2, 0), (3, -1)\}$ باشد . تابع های $f \circ g, g \circ f$ را بنویسید .

تمرین : اگر $f = \{(2, 1), (3, 5), (7, 2), (5, 9), (4, 3)\}$ برد تابع $f \circ f$ را بنویسید .

تمرین: اگر $f = \{(-۳, ۱), (-۱, ۰), (۰, ۲), (-۳, ۳), (۱, ۴)\}$ و $g(x) = \sqrt{۴-x}$ ، تابع gof را مشخص کنید .
 (به عنوان تمرین بیشتر تابع fog را نیز مشخص کنید . راهنمایی: تابع g را با دامنه f برابر قرار دهید و)

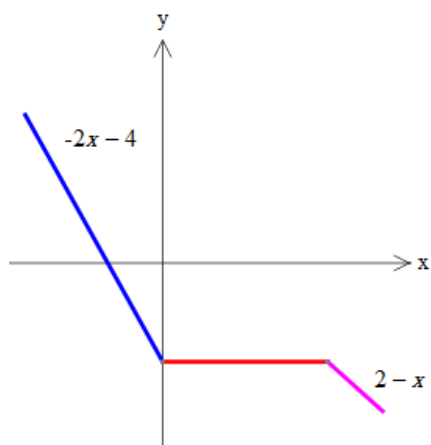
تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x-۹}$ و $g(x) = \frac{۱}{x-۴}$ باشد . دامنه و ضابطه توابع fog, gof را مشخص کنید .

تمرین: اگر $f(x) = \frac{x}{۱-x}$ و $g(x) = \frac{۱}{x-۲}$ باشد . دامنه و ضابطه توابع fog, gof را مشخص کنید .

تمرین: اگر $(fog)(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

تمرین: اگر $(fog)(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x - 1$ ، تابع $f(x)$ را مشخص کنید.

تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است. مقدار $(fofof)(7)$ را بیابید.



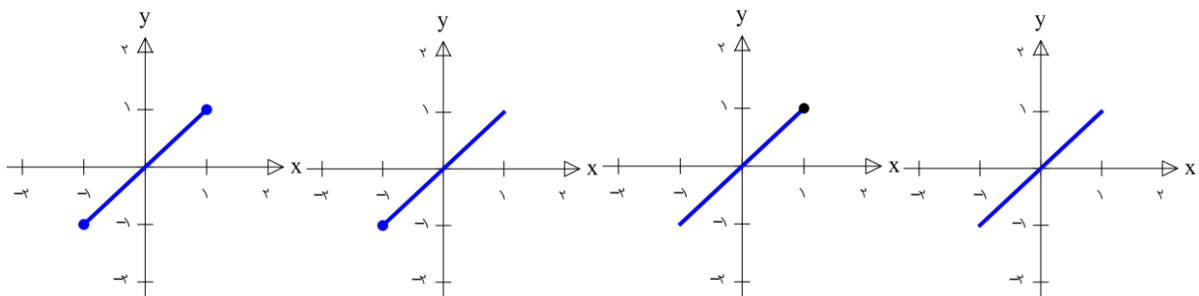
تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ و $g(x) = \frac{x}{3}$ باشد حاصل $(g \circ f)(\sqrt{2} - 1)$ را بیابید.

نگاه: اگر f تابعی وارون پذیر باشد، ترکیب آن با وارون خودش تابع ثابت است البته با دامنه خاص:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{الف) به ازای هر } x \text{ از دامنه } f \text{ داریم:}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{ب) به ازای هر } x \text{ از دامنه } f^{-1} \text{ داریم:}$$

تمرین: اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



نگاه: اگر تابع f و g وارون پذیر باشند، آنگاه: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = 2x^2 + 3; x > 0$ ضابطه تابع $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ را مشخص کنید.

تمرین: تمرین های صفحه ۶۹ و ۷۰ را حل کنید.