

فصل اول: جبر و معادله

درس اول : مجموعه جملات دنباله حسابی و هندسی

درس دوم : معادلات درجه دوم

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

درس اول : مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی :

یه روز معلمی از بچه های کلاسش می خواد که اعداد ۱ تا ۱۰۰ رو جمع بززن و پس از چند دقیقه دانش آموزی به نام گاوس (که بعد ها ریاضی دان بزرگی شد) این کارو انجام داد که باعث حیرت معلم شد . روش دانش آموزو ببینید :

$$1 + 2 + \dots + 100$$

$$100 + 99 + \dots + 1$$

$$101 + 101 + \dots + 101 = 100 \times 101 \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2}$$

پس در حالت کلی همیشه گفت :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین : با روش گاوس فرمولی برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی به جمله اول a و قدر نسبت d پیدا کنید .

$$S_n = a + a+d + a+2d + \dots + a+(n-1)d \quad \text{اینم کمک من به شما :}$$

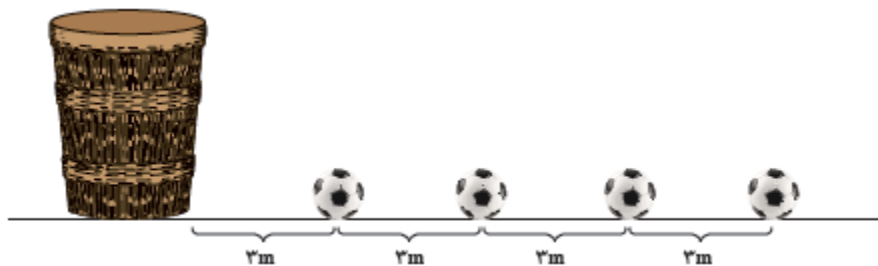
حالا با توجه به فرمول جمله آخر دنباله ، فرمولی که بدست آوردید رو بر حسب جمله آخر دنباله بنویسید .

تمرین: مجموع 100 جمله اول دنباله \dots و 15 و 11 و 7 و 3 را بدست آورید.

تمرین: مجموع همه عدد های طبیعی دو رقمی مضرب 4 را حساب کنید.

تمرین: مجموع همه عدد های دو رقمی که در تقسیم بر 3 باقی مانده 2 دارند را بیابید.

تمرین: در یک مسابقه به صورت شکل زیر باید شرکت کننده در مدت زمان مشخص به طور مکرر از کنار سبد حرکت کرده و توپ اول را برداشته و بازگردد و درون سبد بیاندازد. اگر شخصی در پایان 1528 متر را طی کرده باشد. چند توپ را داخل سبد انداخته است؟



نکته : هرگاه مجموع $n-1$ جمله اول را از مجموع n جمله اول کم کنیم جمله n ام باقی می ماند : $S_n - S_{n-1} = a_n$

در ضمن مجموع یک جمله اول در واقع همان جمله اول است : $S_1 = a$

تمرین : در یک دنباله حسابی $S_n = 5n^2 - 4n$ است . قدر نسبت دنباله و جمله دهم را مشخص کنید .

مجموع جملات دنباله هندسی :

یه روز مخترع شطرنج این بازی رو به شاه نشون میده و شاه که از این بازی خوشش اومده بود بهش میگه هر چی بخواد می تونه به عنوان جایزه درخواست کنه و اون شخص می خواد که برای خونه اول شطرنج بهش یه دونه گندم و برای خونه دوم ۲ تا و برای خونه سوم ۴ تا و به همین ترتیب برای هر خونه بعدی هم دو برابر خونه قبلی بهش دونه گندم بده . شاه با ساده لوحی دستور میده بهش یه کوئی گندم بدن ولی اون قبول نمیکنه و مقدار دقیق اون گندم ها رو میخواد و بعد از محاسبات ریاضیدانان اون زمون مشخص میشه در کل دنیا این مقدار دونه گندم پیدا نمیشه .

حتماً متوجه شدید که داستان قبل در مورد مجموع جملات دنباله هندسی هستش ، حالا بیایید یه فرمول برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی بدست بیاریم تا بتونیم مساله رو حل کنیم :

اگر مجموع جملات رو به صورت زیر بنویسیم :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

و راهنماییتون کنم که بیار کل این عبارت رو در q ضرب کنید به نظرتون برای ادامه چه کاری میشه کرد تا به عبارت ساده تری برسیم ؟

تمرین: مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی زیر چقدر است؟

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots$$

تمرین: اگر یک لایه محافظتی خاص بتواند نصف اشعه خطرناک رادیو اکتیو را جذب کند. حداقل چند لایه نیاز است تا لااقل 97 درصد از شدت اشعه را کاهش دهد؟

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \quad \text{کمک من:}$$

تمرین: در دنباله ای هندسی $4 - 2^{n+2} = S_n$ است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

تمرین: حاصل عبارت $A = (1+x+x^2+\dots+x^6)(1-x+x^2-\dots+x^6)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است؟

تمرین: تمرینات صفحه ۶ کتاب را حل کنید.

درین دوم : معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم :

سال قبل دیدیم که فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جواب های زیر رو به ما داد :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالا با جمع و ضرب و تفریق کردن این جواب ها رابطه ای بین ریشه های معادله درجه دوم و ضرایب معادله پیدا کنید :

حالا فرض کنید جواب های یه معادله درجه دوم رو داریم و میخوایم خود معادله رو بنویسیم به نظرتون چیکار باید کرد ؟
کمک من به شما اینه که بگم یه معادله درجه دوم رو در حالت کلی در نظر بگیرید و کلتشو بر a تقسیم کنید حالا به نظرتون ضرایب آشنا نیستن ؟

تمرین : اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشد مقدار $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید .

تمرین : در معادله $x^2 - 6x + 3 = 0$ مقدار $x_1^2 + x_2^2$ را بدست آورید . (توجه : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$)

تمرین: اگر x_1, x_2 ریشه های معادله $x^2 - 4\sqrt{3}x - 17 = 0$ باشند، مقدار $|x_1 - x_2|$ را بیابید.

تمرین: در معادله $x^2 - (m+1)x - 8 = 0$ رابطه $x_1 = x_2^2$ بین ریشه ها برقرار است. مقدار m را بیابید.

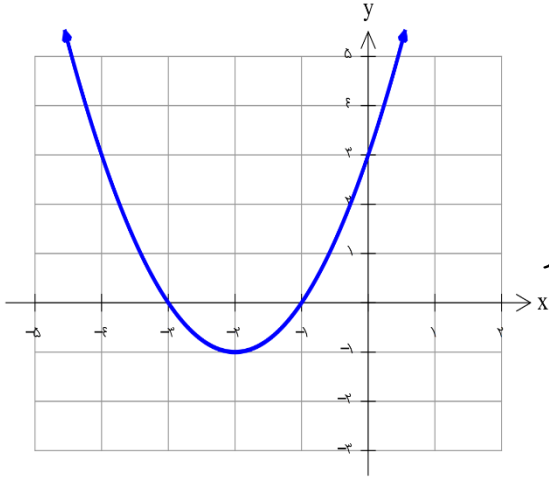
تمرین: در معادله $x^2 - mx + m - 1 = 0$ یکی از جواب ها عکس و قرینه و جواب دیگر است m . را بیابید.

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $3 - 2\sqrt{5}$ و $3 + 2\sqrt{5}$ باشد.

تمرین: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن نصف ریشه های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشد.

تمرین: محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۳۸ و ۸۴ است. طول و عرض آن را بیابید.

صفرهای تابع :



نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبرو رسم شده است .

الف) معادله $f(x) = 0$ را حل کنید .

ب) چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور

طول ها وجود دارد ؟

برای هر تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ رو در صورت وجود، صفرهای تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x هاست .

نکته : اگر $x = a$ یکی از صفرهای تابع f باشه حتما تابع f عاملی به صورت $(x - a)$ داره . در نتیجه برای به سهمی

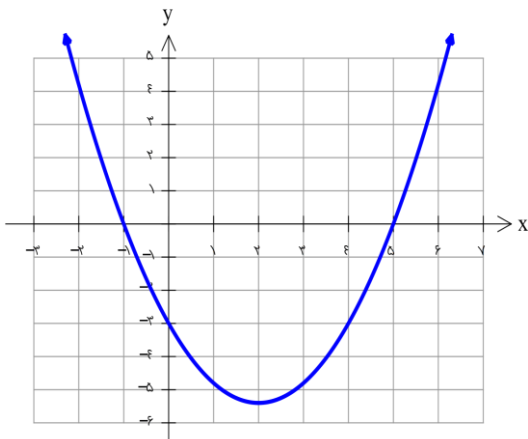
اگر x', x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشن، همیشه تابع رو به صورت زیر نوشت :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

اثبات :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(x^2 - Sx + P) \\ &= a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'') \\ &= a(x - x')(x - x'') \end{aligned}$$

تمرین : اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد . ضابطه سهمی را بنویسید .



تمرین: $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 - kx^2 - x + 2$ است. k و صفرهای دیگر تابع را بیابید.
 راهنمایی: تابع دارای عامل $(x - 1)$ است و با تقسیم می توان عوامل دیگر را یافت.

تمرین: تمام صفرهای تابع $f(x) = (2^x - 1)^2 - 4(2^x - 1) + 3$ را بیابید.

تمرین: تمام صفرهای تابع $f(x) = x^4 - 10x^2 + 16$ را بیابید.

تمرین: بدون حل معادله و فقط به کمک Δ, P, S تعداد و علامت صفرهای توابع زیر را مشخص کنید.

$$y = x^2 - 7x + 12$$

$$y = 2x^2 - x - 6$$

$$y = x^2 + x + 1$$

تمرین: به ازای چه مقادیری از m معادله $x^2 + (m - 4)x + 2m + 4 = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

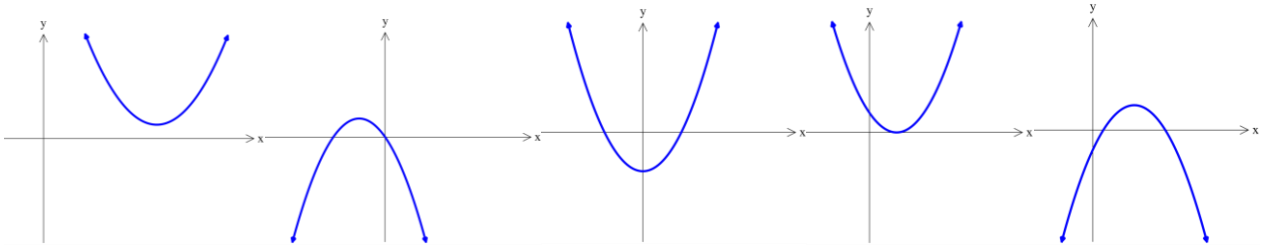
تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آن :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی دارد یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبت و اگر به سمت پایین باشن a منفی .

و از اونجایی که $f(0) = c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل برخورد تابع با محور عرض ها، علامت c رو تشخیص بدیم .

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

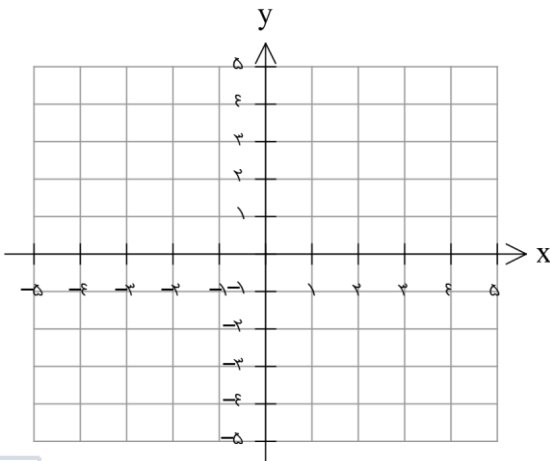
تمرین: نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند، علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید.



روش هندسی حل معادلات :

الف) معادله $(x - 1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ رو تو چرک نویس حل کنید .

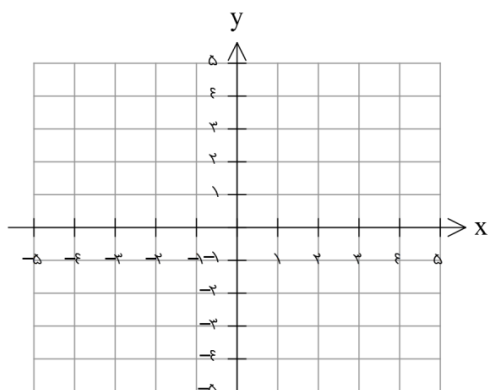
ب) توابع $f(x) = (x^2 - 1)^2$ و $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ رو رسم کنید .



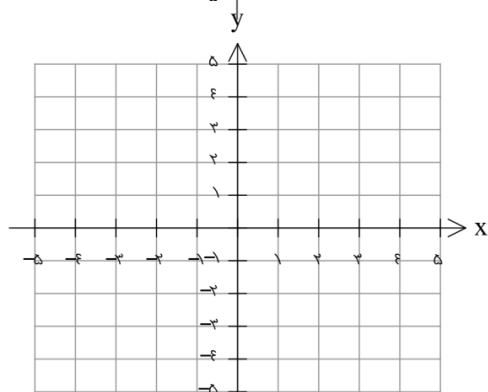
چا جواب های معادله قسمت الف و طول محل برخورد نمودار های قسمت ب با هم چه ارتباطی دارن ؟

نتیجه :

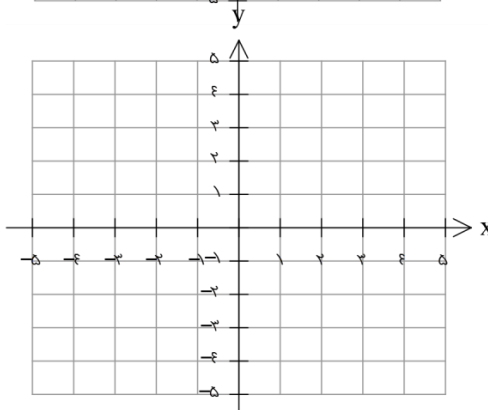
تمرین : تعداد و مقدار ریشه های معادله های زیر را به روش هندسی بدست آورید .



$$\text{الف) } |x - 1| = x^2 - 2x + 1$$



$$\text{ب) } (x - 2)^2 + 1 = -2x + 5$$



$$\text{ج) } -|x + 1| + 1 = \frac{1}{3}x$$

تمرین : تمرین های صفحه ۱۵ و ۱۶ را حل کنید .

درین سوم : معادلات گویا و کنگ

معادلات شامل عبارت های گویا :

در بعضی از معادله ها عبارت های کسری بوجود میاد که صورت و مخرج چند جمله ای هستند . به این نوع معادله ها معادله های گویا می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : در یک مغازه ماهی های تزئینی ، برای نگه داری ماهی های آب شود محلول آب نمک ۵ درصد نیاز است ولی کارگر مبتدی مغازه ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب ۳ درصد درست کرده است . اگر در مغازه به اندازه کافی نمک وجود داشته باشد چقدر نمک لازم است تا محلول ۵ درصد شود ؟

بیاید با کمک هم حلش کنیم :

گام اول : وزن نمک و وزن محلول فعلی چقدره ؟

گام دوم : اگر ما x گرم نمک دیگه بهش اضافه کنیم وزن نمک و وزن محلول هر کدوم چقدر میشه ؟

گام سوم : اینکه میگییم محلول ۷ درصد یعنی نسبت چی به چی باید $۰/۰۷$ بشه ؟ درستون رو بنویسید .

گام چهارم : حالا آیا میشه گفت اینی که بدست اومده معادله گویاست ؟ پیشنهاد من برای حلش اینه که بجوری مخرج ها رو از بین ببریم ، روش شما برای از بین بردن مخرج ها چیه ؟ خوب حلش کنید .

تمرین : مساله قبل رو با فرض اینکه تو مغازه هیچ نمک دیگه ای موجود نباشه و کارگر مغازه مجبور بشه کمی از آب محلول رو تبخیر کنه حلش کنید . یعنی در واقع وزن آبی که باید تبخیر بشه رو بدست بیارین .

نکته: در حل معادلات گویا جوابهایی که مخرج را صفر کنند مورد قبول نخواهند بود.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{24}{10+x} + 1 = \frac{24}{10-x} \quad (\text{ج})$$

تمرین: به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

تمرین: دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند. هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند؟

تمرین: یک محلول آب نمک با غلظت ۸۰ داریم و به آن ۵ لیتر محلول آب نمک ۲۰ درصد اضافه می کنیم. اگر محلول بدست آمده دارای غلظ ۵۰ درصد باشد، حجم محلول اولیه چند لیتر بوده است؟

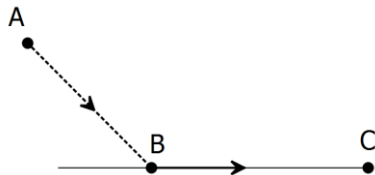
تمرین: قطاری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را طی می کند ولی در راه برگشت از سرعت خود ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته و به همین دلیل نیم ساعت دیر تر می رسد. زمان رفت این قطار چقدر بوده است؟

تمرین: « مصریان باستان معتقد بودند مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر با نسبت مجموع این دو به طول است زیباترین مستطیل خواهد بود ($\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$) و این نسبت را در ریاضیات نسبت طلایی می نامند. این نسبت در بیشتر اندامهای بدن و شبکه چشم انسان رعایت شده است و از این نسبت برای ساخت بناهای تاریخی بسیاری استفاده شده است. اگر بخواهیم زمینی با محیط ۱۴۴ متر و نسبت طولی بسازیم طول و عرض آن چقدر باید باشد؟

معادلات شامل عبارات های گنگ :

در بعضی از معادله ها عبارت های رادیکالی بوجود میاد که به این نوع معادله ها معادله های گنگ می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : معمولاً مرغای دریایی برای شکار ماهی قستی از مسیر خودشونو تو هوا و قسمتیشو



هم رو سطح آب طی می کنن تا کمترین انرژی ممکنو مصرف کنن !!! حالا یه مرغ

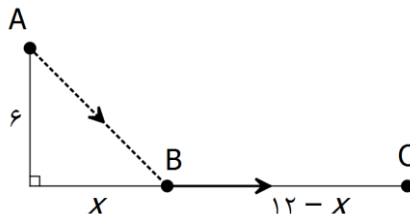
دریای رو تصور کن که مثل شکل پایین میخواد اول تو نقطه B خودشو به سطح

آب برسونه بعدش رو سطح آب تا محل شکار یعنی نقطه C حرکت کنه .

اگر انرژی لازم برای هر متر پرواز در هوا برایشون ۱۴ کیلو کالری و انرژی لازم برای پرواز به موازات سطح آب ۱۰ کیلو کالری باشه و فاصله مرغ دریایی از سطح آب ۶ متر و فاصله افقی از محل شکار ۱۲ متر باشه طبق محاسبه زیست شناسان این پرنده با مصرف ۱۸۰ کیلو کالری به محل شکار میرسه چون این عدد بهینه ترین مقدار مصرف انرژی هستش !!! هدف ما اینه که محاسبه کنیم بینیم نقطه فرود یعنی B تو چه فاصله ای از نقطه شکار یعنی C قرار میگیره ؟؟؟

حالا بیایید با هم مساله رو حل کنیم :

در این مساله اعداد مربوط به فاصله ها ۶ و ۱۲ متره که می تونه تو شکل برای مشخص کردن مجهولات مورد استفاده قرار بگیره .



حالا شما میتونید فاصله AB رو حساب کنید و یه تساوی بنویسید که مجموع انرژی مصرف شده در کل مسیر ۱۸۰ بشه . سوال اصلی من از شما اینه : روش پیشنهادیتون برای حل معادله چیه ؟

نکته : در حل معادلات گنج جواب‌ها حتماً باید در معادله صدق کنند در غیر این صورت پذیرفته نیستن چون عمل توان رسانی میتونه جواب‌های اضافی وارد معادله کنه.

مثلاً: در حل معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ پس از توان رسانی و حل دو جواب ۲ و ۷ بدست می‌آید که فقط یکی از آنها درست است و آن هم عدد ۷ است زیرا $\sqrt{2+2} \neq 2-4$ ولی $\sqrt{7+2} = 7-4$

تمرین: مختصات نقاطی روی محور x را بیابید که فاصله آنها از نقطه $(2, 3)$ برابر ۵ باشد.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+3} + x = 6 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\text{ج) } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$$

$$\text{د) } \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x} = 0 \text{ (آیا می توان بدون حل به نتیجه رسید !!!)}$$

تمرین: بدون حل معادله بگویید چرا معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-4} + 2 = 0$ ریشه حقیقی ندارد.

تمرین: تمرین های صفحه ۲۲ حل شود.

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

تعریف قدر مطلق :

سال قبل با قدر مطلق آشنا شدیم و دیدیم که قدر مطلق یک عدد حقیقی به صورت زیر تعریف می شه :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید .

$$|\sqrt{2} - 2| =$$

$$|\sqrt{5} - \sqrt{3}| =$$

$$|1 - 2(2 - 3)| =$$

ویژگی های قدر مطلق :

$$|x| \geq 0 \text{ (الف)}$$

تمرین : معادله $|x + 1| + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ چند جواب دارد ؟

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ (ب)}$$

تمرین : عبارت های زیر را تا حد ممکن ساده کنید .

$$\sqrt{4a^2 + 4a^2 + 1} =$$

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} =$$

تمرین : ثابت کنید $|ab| = |a||b|$ و $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ج) $|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = a$ یا $x = -a$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

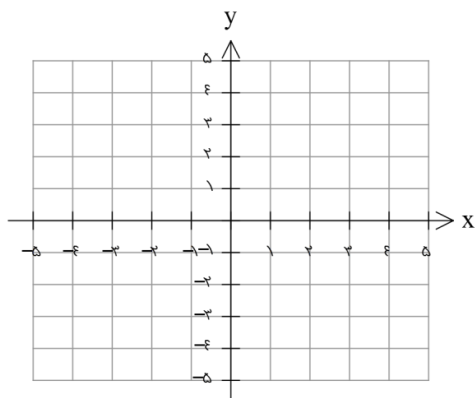
$$||x| - 1| = 2$$

$$|x + 9| = 2x + 3$$

د) $|x| = |a| \longleftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

$$|x + 9| = |2x + 3|$$



ه) $|-x| = |x|$

تمرین: تابع $y = |1 - x|$ را رسم کنید.

و) $|x|^2 = x^2$ (با این نکته می شه معادله های قسمت ج و د رو هم حل کرد)

تمرین: معادله $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ چند جواب دارد؟ جواب‌ها را مشخص کنید.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \text{ زا}$$

تمرین: نامعادله $|2x - 1| < 3$ را حل کنید.

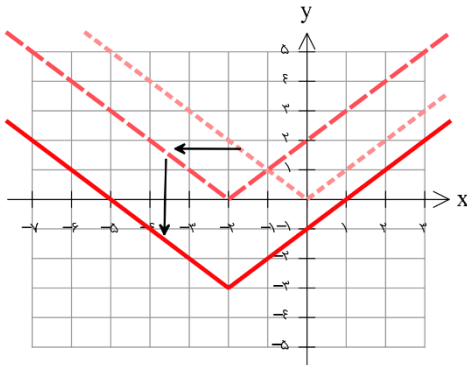
تمرین: ثابت کنید $|a + b| \leq |a| + |b|$ (نا مساوی مثلثی)

راهنمایی: از آنجایی که $|a| \leq |a|$ پس می‌توان نوشت $|a| \leq a \leq |a|$ و همین‌طور $|b| \leq b \leq |b|$.

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a \text{ ح}$$

تمرین: جواب نامعادله $|1 - 2x| > 3$ را بیابید.

الف) رسم تابع با یک قدر مطلق بدون ضرب و توان : به کمک انتقال رسم کنید راحت تره .

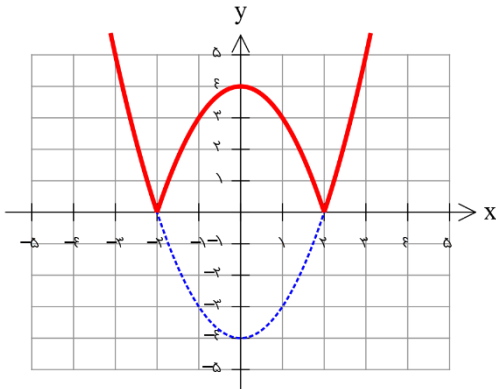


مثال : تابع $y = |x + 2| - 3$ رو با استفاده از تابع $y = |x|$ و یک واحد حرکت به راست و یک واحد به پایین رسم می کنیم .

ب) رسم تابع شامل یک قدر مطلق با ضرب یا توان : در این صورت راحت تره که اول تابع داخل قدر مطلقو رسم و بعدش قسمت زیر محور X رو پاک کرده و قرینه اونو بالای محور رسم کنیم چون :

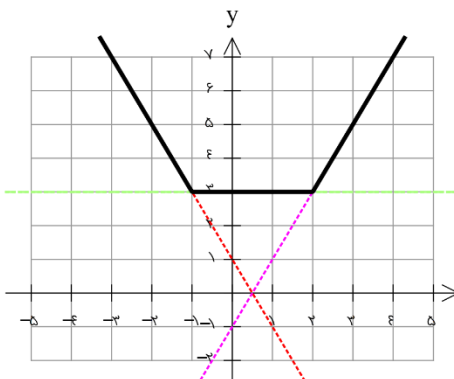
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

بالای محور خود تابع $f(x) \geq 0$
پایین محور قرینه تابع $f(x) < 0$



مثال : برای رسم تابع $y = |x^2 - 4|$ اول $f(x) = x^2 - 4$ رو رسم می کنیم بعدش قسمت پایینو پاک کرده و قرینشو بالا می کشیم .

ج) رسم تابع قدر مطلق پیچیده (چند قدر مطلق یا ترکیب عبارت قدر مطلق و غیر قدر مطلق) :

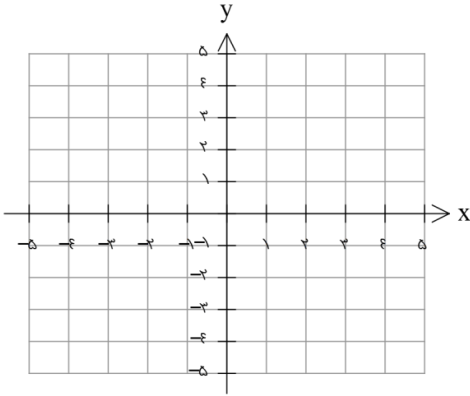


مثال : برای رسم تابع $y = |x + 1| + |x - 2|$ اول ریشه های هر قدر مطلقو مشخص می کنیم که ۲ و -۱ هستند. بعدش هر قدر مطلقو تعیین علامت می کنیم .

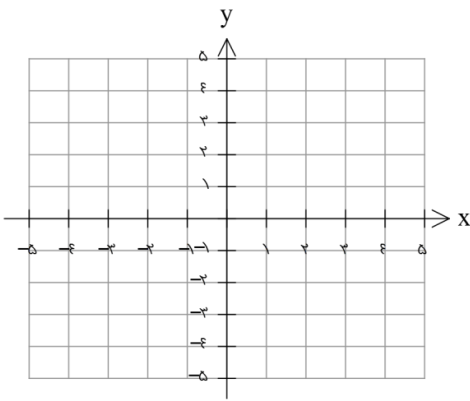
$$y = \begin{cases} -(x+1) - (x-2) & x < -1 \\ (x+1) - (x-2) & -1 \leq x \leq 2 \\ (x+1) + (x-2) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x + 1 & x < -1 \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

تمرین : نمودار توابع زیر را رسم کنید .

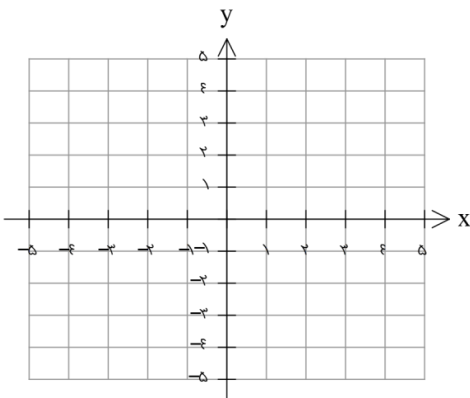
الف) $y = 3|x^2 - 2x| + 1$ (ضریب میثونه برگرده توی قدر مطلق)



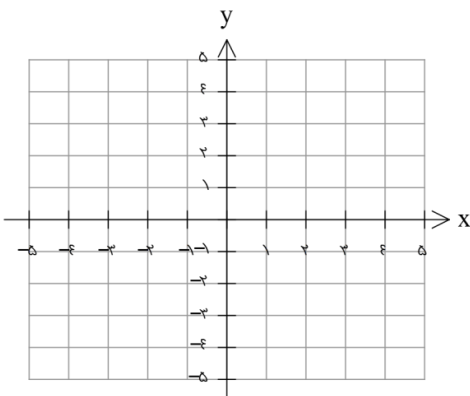
ب) $y = |x - 1| - |x + 3|$



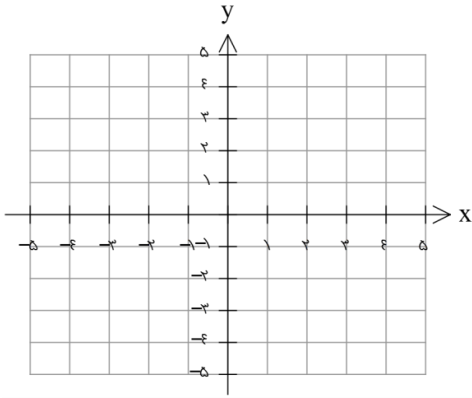
ج) $y = ||x + 1| - 1|$



د) $y = |2x + 1| + |3x - 2|$

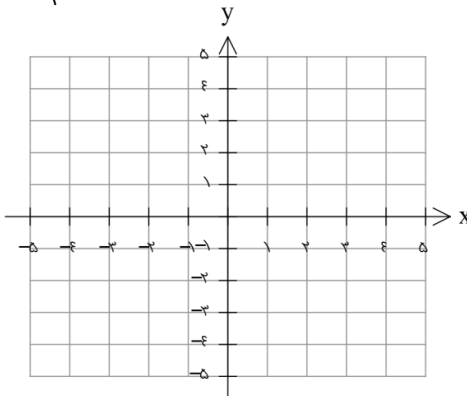
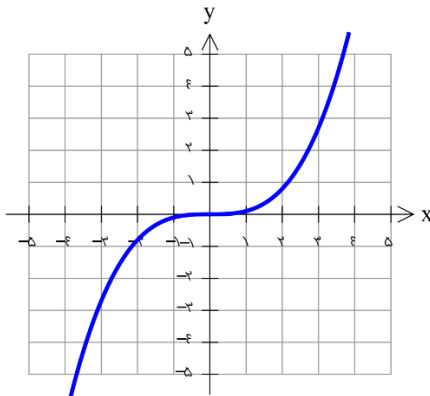


$$y = x - 3|x - 1| + 2 \quad (5)$$

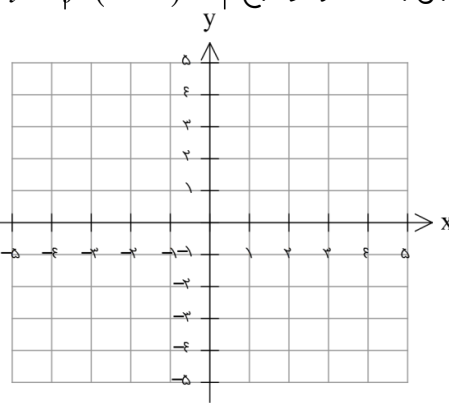
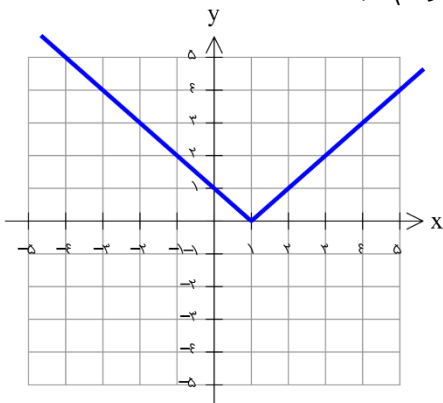


تمرین: معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را به روش هندسی حل کنید.

تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ را رسم کنید.



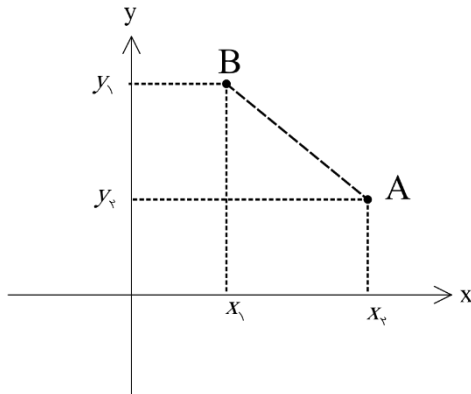
تمرین: اگر نمودار f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = |f(x+1) - 1|$ را رسم کنید.



تمرین: تمرینات صفحه ۲۸ را حل کنید.

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی در واقع ترکیب هندسه و جبر مقدماتیه . در واقع تو هندسه تحلیلی به هر نقطه تو صفحه یه آدرس داده میشه که بهش مختصات می گن و با همین آدرس ها معادلات جبری شکل ها نوشته میشن . بنیانگذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما تو قرن ۱۷ ام بودن .



فاصله بین دو نقطه :

اگر $A(x_2, y_2)$ و $B(x_1, y_1)$ دو نقطه مثل شکل

تو صفحه مختصات باشن به کمک قضیه فیثاغورس یه فرمول

برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بدست بیارین .

تمرین : اگر $A(1, 3), B(-1, 2), C(5, -5)$ سه راس یک مثلث باشند .

الف) طول اضلاع را بیابید .

ب) نشان دهید این مثلث قائم الزویه است .

ج) شیب پاره خط AB, AC نسبت به هم چگونه اند ؟ کدام دو ضلع مثلث هستند ؟

حدس شما در مورد شیب و عمود بودن :

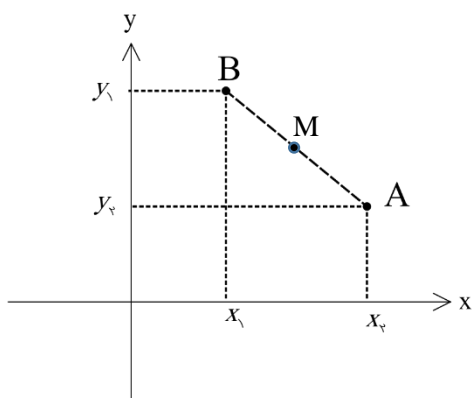
تمرین: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به هم وصل می کند.

راهنمایی: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است بنابراین اگر نقطه $P(x, y)$ باشد که $PA = PB$ آنگاه این نقطه روی عمود منصف پاره خط است:

تمرین: در سوال قبل شیب خط بدست آمده چه رابطه ای با شیب پاره خط دارد؟ آیا حدس قبل درست بوده؟

نویس:

تمرین: آیا نقطه $(4, 1)$ روی عمود منصف پاره خط واصل بین $A(1, 1), B(2, -2)$ قرار دارد؟



مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر $A(x_2, y_2)$ و $B(x_1, y_1)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات

باشند و M مختصات وسط پاره خط باشد تصویر این نقاط روی

محورهای مختصات تصور کن و فرمولی برای بدست آوردن مختصات

M بنویس:

تمرین : معادله عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(1, 2), B(-1, 3)$ را به کمک نقطه تقاطع و شیب پاره خط بنویسید .

تمرین : نقاط $A(1, 4), B(-3, 1), C(0, -1)$ رئوس مثلث هستند. طول میانه وارد بر ضلع BC را بیابید .

تمرین : قرینه نقطه $A(1, -2)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 3)$ بدست آورید .

تمرین : قرینه نقطه $A(3, -4)$ را نسبت به مبدأ مختصات بدست آورید .

فاصله یک نقطه از یک خط :

اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه و $ax + by + c = 0$ معادله یک خط باشد، فاصله نقطه و خط از این فرمول بدست میاد :

$$|AH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین: فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را بدست آورید.

تمرین: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $3x + 4y = k$ برابر ۲ است. k را بیابید.

تمرین: اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

تمرین: دو خط $2x - 3y = 2$ ، $3x + 2y = 1$ معادله های دو ضلع یک مستطیل هستند و نقطه $A(2, 5)$ یک راس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

تمرین: مساحت مستطیلی که اضلاع آن روی دو خط $2x + y = 2$ ، $4x + 2y + 6 = 0$ قرار دارد چقدر است؟

(راهنمایی: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با: $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

تمرین: تمرین های صفحه ۳۵ و ۳۶ را حل کنید.