ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل ۱ : جبر و معادله

درس اوّل : هندسه تحلیلی

بحث هندسه‌ی تحلیلی یکی از بحث های مهم و کاربردی در ریاضیات است. به کمک این بحث است که می توان معادلات جبری برای اشکال هندسی بیان نمود و سپس آنها را بررسی و حل کرد.

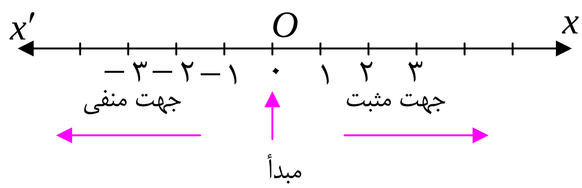
قسمت اوّل : محور اعداد حقیقی

محور اعداد حقیقی خط راستی است که روی آن

الف : نقطه ای به عنوان مبدأ

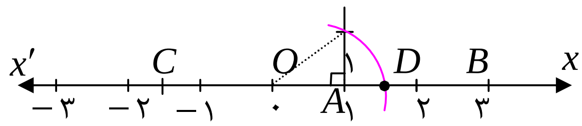
ب : واحدی برای اندازه گیری طول ها

ج : جهتی به عنوان جهت مثبت، اختیار شده باشد. مانند محور $x'ox$ در شکل زیر



بدیهی است که هر نقطه روی محور را می توان با یک عدد حقیقی نشان داد و هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه روی محور است. به عبارتی دیگر بین مجموعه ای اعداد حقیقی و مجموعه ی نقاط روی محور تناظر یک به یک قرار دارد.

عدد حقیقی متناظر با هر نقطه روی محور را **طول** آن **نقطه** می نامند. به عبارت دیگر طول هر نقطه روی یک محور عددی است جبری که قدرمطلق آن برابر با فاصله ی آن نقطه تا مبدأ محور است.



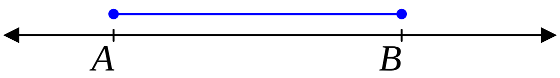
طول هر نقطه مانند A روی محور اعداد حقیقی را با x_A نمایش می دهند.

$$x_A = OA$$

در شکل فوق داریم:

$$x_O = ۰ \quad \text{و} \quad x_A = ۱ \quad \text{و} \quad x_B = ۳ \quad \text{و} \quad x_C = -\frac{۳}{۲} \quad \text{و} \quad x_D = \sqrt{۲}$$

اگر B و A دو نقطه روی محور باشند، بدیهی است که **طول یا اندازه‌ی پاره خط** AB برابر قدر مطلق تفاضل طول های این دو نقطه است.

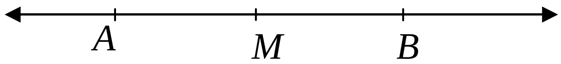


$$AB = |x_B - x_A|$$

در صورتی که نقطه‌ی M **وسط** پاره خط AB باشد. می توان نوشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

استدلالی که برای اثبات درستی این تساوی ارائه می شود به صورت زیر است.



$AM = MB$

$$\rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

تمرین ۱ : اگر دو نقطه‌ی B و A روی یک محور باشند و $x_A = ۵$ و $x_B = -۳$ در این صورت:

الف : اندازه‌ی پاره خط AB را تعیین کنید.

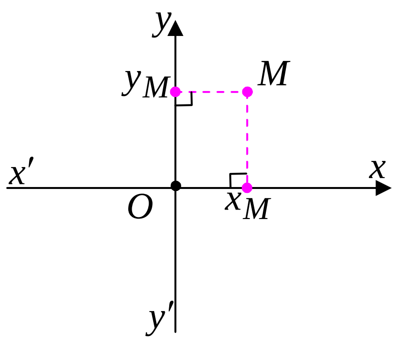
ب : طول نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین ۲ : اگر سه نقطه‌ی C و B و A روی یک محور چنان قرار دارند که نقطه‌ی B وسط پاره خط AC بوده و $x_A = ۲$ و $x_B = ۳m + ۲$ و $x_C = m + ۱$ باشد، مقدار m را تعیین کنید.

***

قسمت دوّم : دستگاه محور های مختصات (دستگاه مختصات دکارتی)

دو محور $x'ox$ و $y'oy$ که در یک صفحه قرار دارند، یک دستگاه مختصات به وجود می آورند، هرگاه این دو محور بر هم عمود باشند و در نقطه ی O (مبدأ مشترک) متقاطع باشند.



محور افقی ($x'ox$) را محور طول ها و محور قائم ($y'oy$) را محور عرض ها می نامند.

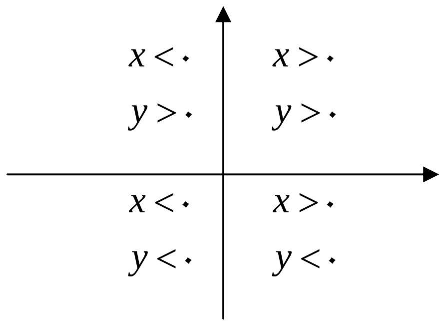
بدیهی است که هر نقطه روی صفحه ، مانند M با دو عدد حقیقی

مشخص می شود. تصویر نقطه‌ی M روی محور طول ها را طول (x_M) و تصویر نقطه‌ی M روی محور عرض ها را عرض (y_M) می نامند.

$$M\left|\begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix}\right. \qquad \text{یا} \qquad M(x_M\,,y_M)$$

طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند.

نتیجه : دستگاه مختصات قائم صفحه را به چهار ناحیه (ربع) تبدیل می کند.علامت مختصات هر نقطه با توجه به ربعی که در آن قرار دارد، به صورت زیر است.



همچنین:

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

تمرین ۳ : نقطه‌ی $P(۲m-۱,m+۳)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

الف : نقطه‌ی P روی محور طولها قرار گیرد.

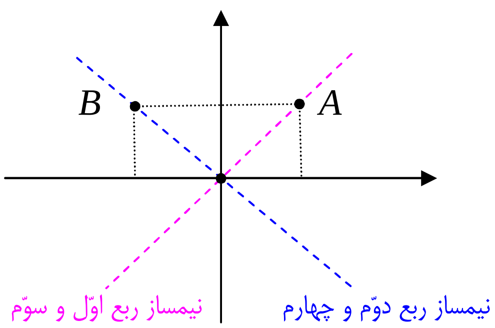
ب : نقطه‌ی P روی محور عرض ها قرار گیرد.

تمرین ۴ : نقطه‌ی $P(۲k-۱,k+۱)$ در ناحیه‌ی دوّم دستگاه مختصات قرار دارد. حدود k را تعیین کنید.

توجه :

۱ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع اوّل و سوّم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض مساوی هستند.

۲ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع دوّم و چهارم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض قرینه هستند.



تمرین ۵ : نقطه‌ی $P(۲m-۶,m-۳)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

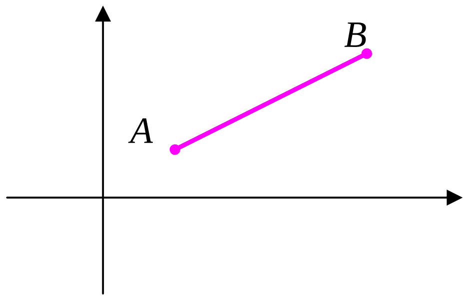
الف : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع اوّل و سوّم قرار گیرد.

ب : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع دوّم و چهارم قرار گیرد.

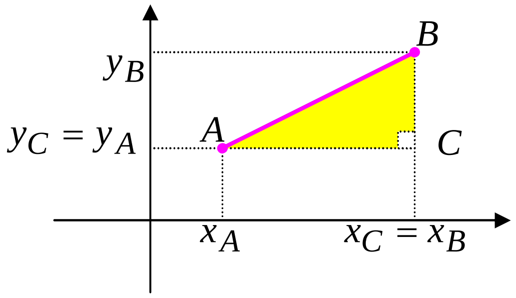
اندازه‌ی پاره خط در دستگاه محور های مختصات

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند، در این صورت اندازه‌ی (طول) پاره خط AB به صورت زیر است.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



برای مطالعه : برای اثبات درستی این موضوع از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می شود.



$$AB^2=AC^2+BC^2$$

$$AC=|x_C-x_A|=|x_B-x_A|$$

$$BC=|y_B-y_C|=|y_B-x_A|$$

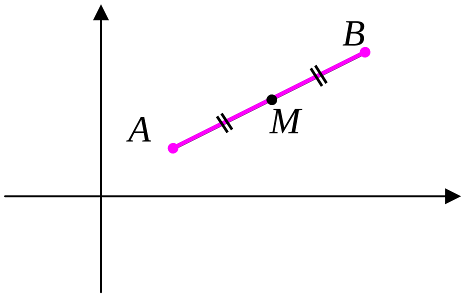
$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

$$\to AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

***

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

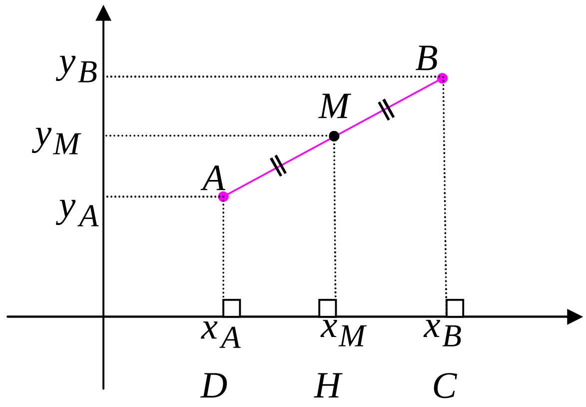
اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پـاره خـط AB باشـد. در ایـن صورت مختصات نقطه‌ی M به شکل زیر است.



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

برای مطالعه : برای اثبات این موضوع می توان به شکل زیر استدلال کرد.

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پاره خط AB در نظر گرفته شود. در این صورت می توان گفت که چون نقطه‌ی M وسط پاره خط AB از متوازی الاضلاع $ABCD$ می باشد و MH موازی دو قاعده رسم شده است (هر سه بر محور x عمودند). پس بنابر قضیه‌ی خطوط موازی (تالس) می توان نوشت :



$$\frac{DH}{HC}=\frac{AM}{MB}\xrightarrow{AM=MB}\frac{DH}{HC}=۱\rightarrow DH=HC$$

$$\rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M\rightarrow ۲x_M=x_A+x_B\rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

تمرین ۶ : دو نقطه‌ی $A(۳,-۷)$ و $B(-۱,-۴)$ داده شده اند.

الف) طول پاره خط AB را تعیین کنید.

ب) مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۷ : اگر $A(۱,۰)$ و $B(-۲,۳)$ دو رأس مقابل مربعی باشند. مساحت مربع را محاسبه کنید.

۸ : نقاط $A(-۳,۰)$ و $B(۶,۱۰)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس یک مثلث می باشند.اندازه‌ی میانه‌ی[1] وارد بر ضلع BC را تعیین کنید.

۹ : اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۲,-۲)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

[1]. در هر مثلث، میانه، پاره خطی است که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن وصل می کند.

۱۰ : اگر $A(۴,۰)$ و $B(۲,-۲\sqrt{۳})$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت و محیط آن را تعیین کنید.

۱۱ : اگر $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(-۵,۴)$ سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت آن را تعیین کنید.

> **یادآوری :** مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع بـه ضلـع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

۱۲ : دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای، نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $P(۷,۳)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

***

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های دو رأس روبرو با مجموع طول های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

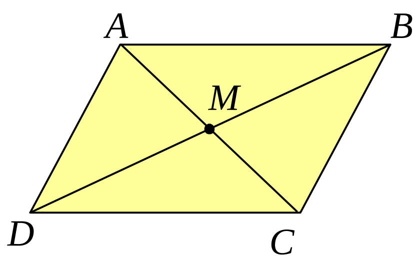
$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

به همین ترتیب مجموع عرض های دو رأس روبرو با مجموع عرض های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

برای مطالعه : برای اثبات این مطلب می توان از موضوع هندسی زیر استفاده کرد.

با توجه به اینکه در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند. لذا می توان نوشت:



M وسط پاره خط AC نقطه‌ی $\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$

M وسط پاره خط BD نقطه‌ی $\Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_D}{۲}$

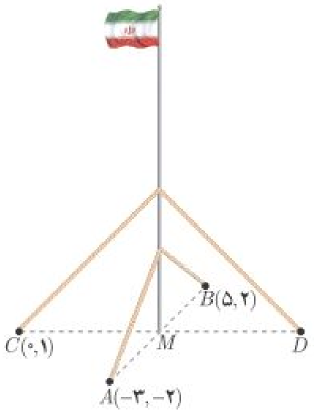
$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

و به همین ترتیب داریم :

$$\Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

تمرین ۱۳: اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۰)$ مختصات سه رأس متوالی از متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات رأس D را تعیین کنید.

تمرین ۱۴: یک میله‌ی پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری فاصله‌ی هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل آن تا پای میله می باشد، مختصات نقطه‌ی D را به دست آورید.



تمرین۱۵: مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط زیر به همین ترتیب رئوس متوازی الاضلاع باشند.

$$A(۱,n+۳) \text{ و } B(n-۱,۲m) \text{ و } C(۳,۱) \text{ و } D(۳m,-۱)$$

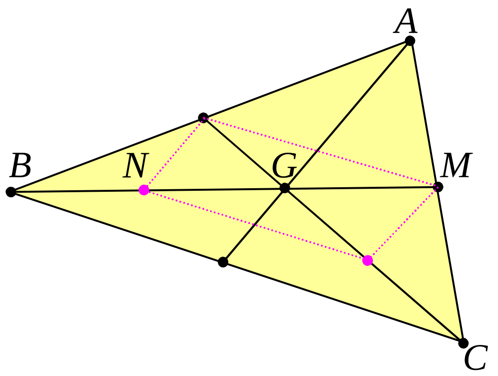
***

مختصات مرکز ثقل مثلث (نقطه ی برخورد میانه های مثلث)

اگر نقطه‌ی G محل تقاطع میانه های مثلث ABC[2] باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

برای مطالعه : اگر G نقطه‌ی برخورد میانه های مثلث ABC باشد. ثابت می شود که نقطه‌ی برخورد میانه های مثلث به فاصله‌ی $\frac{۱}{۳}$ طول هر میانه از وسط ضلع مقابل و به فاصله‌ی $\frac{۲}{۳}$ طول هر میانه از رأس نظیر آن میانه است.



$$BG \text{ وسط پاره خط } N \text{ نقطه‌ی} \Rightarrow x_N = \frac{x_B + x_G}{۲}$$

$$MN \text{ وسط پاره خط } G \text{ نقطه‌ی} \Rightarrow x_G = \frac{x_N + x_M}{۲}$$

$$AC \text{ وسط پاره خط } M \text{ نقطه‌ی} \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\frac{x_B + x_G}{۲} + \frac{x_A + x_C}{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_G}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴x_G = x_A + x_B + x_C + x_G \Rightarrow ۳x_G = x_A + x_B + x_C$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$\Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

تمرین ۱۶ : اگر $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ و $C(-۸,۴)$ سه رأس مثلثی باشند.مختصات محل تلاقی میانه های مثلث را به دست آورید.

[2]. محل تقاطع میانه های هر مثلث را مرکز ثقل مثلث نیز می نامند.

شیب خط

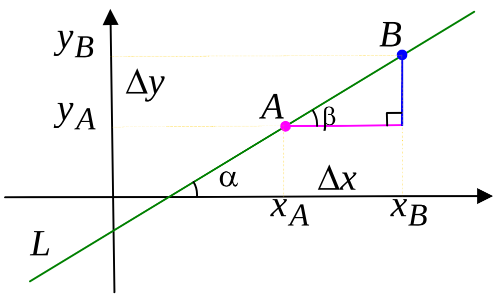
اگر B و A دو نقطه از خط L باشند. شیب (ضریب زاویه) خط L به صورت زیر تعریف می شود.

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی واضح است که $\angle\alpha = \angle\beta$. همچنین بنابر بر تعریف تانژانت زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا شیب هر خط ، تانژانت زاویه ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



نتیجه : با این تعریف واضح است که

الف : شیب محور طولها و هر خط موازی آن ، برابر صفر است.

ب : شیب محور عرضها و هر خط موازی آن ، تعریف نشده است.

ج: شیب نیمساز ربع اوّل و سوّم برابر ۱ و شیب نیمساز ربع دوّم و چهارم برابر ۱− است.

تمرین ۱۷ : شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۵,-۴)$ و $B(۳,۰)$ را به دست آورید.

تمرین ۱۸ : خطی با محور طولها در جهت مثبت زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل می دهد. شیب این خط را بنویسید.

تمرین ۱۹ : ثابت کنید که سه نقطه‌ی $A(-۴,۲)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(۱,-۳)$ روی یک خط راست واقع اند.

***

معادله‌ی خط

هر رابطه‌ی خطی بین طول و عرض تمام نقاط خط را معادله‌ی خط می نامند.

مثال : دو نقطه‌ی $A(۳,۷)$ و $B(۱,۳)$ را در نظر بگیرید. به کمک تعیین رابطه‌ی طول و عرض این دو نقطه، معادله‌ی خط AB را بنویسید.

حل : با کمی دقت معلوم می شود که اگر ابتدا طول هر کدام از این دو نقطه را دو برابر و سپس با عدد یک جمع کنیم، عرض نقطه به دست می آید. لذا رابطه‌ی موجود (معادله‌ی خط) به صورت زیر است.

$$y = ۲x + ۱$$

تمرین ۲۰ : نمودار خط مثال قبل را رسم کنید.

تذکر : به طور کلی معادله‌ی هر خط به صورت زیر است.

$$y = mx + n$$

در این معادله که آن را **معادله‌ی استاندارد خط** نیز می نامند،عدد m (ضریب x) را شیب و عدد n را عرض از مبدأ[3] می نامند.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$ و $(۵,۳)$ می گذرد.

حل :

روش اوّل: ابتدا شیب خط را تعیین می کنیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۷ - ۳}{۲ - ۵} = \frac{۴}{-۳}$$

و چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد، پس :

$$y = \frac{-۴}{۳}x + n$$

اکنون برای تعیین مقدار n مختصات یکی از نقاط داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$(۲,۷) \xrightarrow{y=\frac{-۴}{۳}x+n} ۷ = \frac{-۴}{۳}(۲) + n \rightarrow n = \frac{۲۹}{۳}$$

در نهایت معادله‌ی خط را به صورت زیر به دست می آوریم.

---

[3]. محل تلاقی هر خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

$$y = mx + n \rightarrow y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲۹}{۳}$$

روش دوّم: چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد. مختصات دو نقطه‌ی داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$\begin{cases} ۵m + n = ۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases} \rightarrow (-۱) \times \begin{cases} ۵m + n = ۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۵m - n = -۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases}$$

$$\rightarrow -۳m = ۴ \rightarrow m = \frac{۴}{-۳} \,,\; n = \frac{۲۹}{۳}$$

لذا معادله‌ی خط مطلوب به شکل زیر است.

$$y = mx + n \rightarrow y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲۹}{۳}$$

نتیجه : معادله‌ی هر خط که گذرا از مبدأ مختصات به صورت $y = mx$ است.

تمرین ۲۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و شیب آن ۳ − باشد.

***

روش های تعیین معادله‌ی خط

واضح است که از هر نقطه بی شمار خط می گذرد ، ولی فقط یک خط با شیب معین از هر نقطه مـی گـذرد. اگر خطی با شیب m گذرا از نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ در نظر گرفته شود. می توان معادله‌ی خط را بـه صـورت زیر نوشت:

$$y = m(x - x_۰) + y_۰$$

تمرین ۲۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-۲,۱)$ بگذرد و شیب ۵− آن باشد.

تمرین ۲۳ : معادله‌ی خط را بنویسید که از نقطه‌ی $P(۳,-۱)$ بگذرد و با محور طول هـا در جهـت مثبـت زاویه‌ی ۶۰ درجه تشکیل دهد.

تمرین ۲۴ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی (۲,۷) و (۵,۳) می گذرد.

حل :

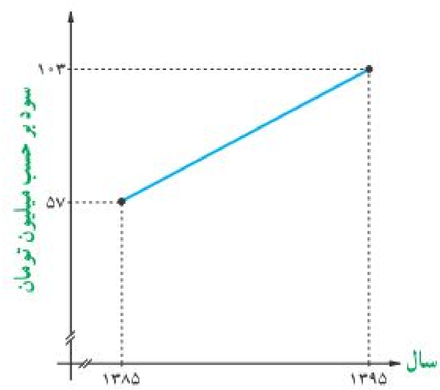
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

توجه : از هر دو نقطه فقط یک خط می گذرد. لذا برای رسم نمودار خط کافی است ، دو نقطه از نمودار آن خط را تعیین کنیم.

تمرین ۲۵ : نمودار خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را رسم کنید.

تمرین ۲۶ : سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ الی ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است.



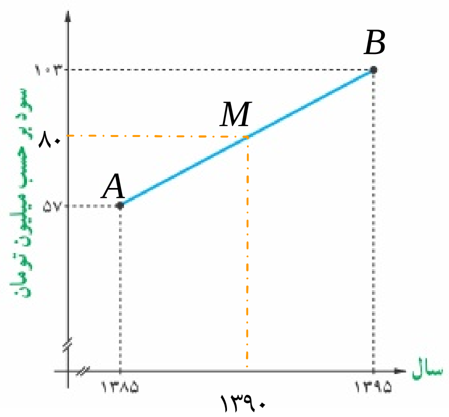
الف : میانگین سود سالانه‌ی این شرکت در دهه‌ی مورد نظر چقدر بوده است؟

ب: در کدام سال، مقدار سود سالانه، با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ : اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه‌ی شرکت چقدر باشد؟

حل :

الف:



$$x_M=\frac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲}=۱۳۹۰$$

و

$$y_M=\frac{۵۷+۱۰۳}{۲}=۸۰\quad \text{(سود متوسط)}$$

ب: ابتدا معادله‌ی خط AB را می نویسیم.

$$m_{AB}=\frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵}=\frac{۲۳}{۵}$$

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷$$

$$y=۸۰\xrightarrow{y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷}۸۰=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\to ۲۳=\frac{۲۳}{۵}x-۶۳۷۱$$

$$\to ۶۳۷۱=\frac{۲۳}{۵}x\to ۳۱۹۷۰=۲۳x\to x=\frac{۳۱۹۷۰}{۲۳}=۱۳۹۰$$

پ :

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\xrightarrow{x=۱۴۰۵}y=\frac{۲۳}{۵}(۱۴۰۵-۱۳۸۵)+۵۷=۱۴۹$$

***

معادله‌ی کلی خط

برای هر خط می توان معادله ای به صورت زیر نوشت:

$$ax + by + c = ۰$$

واضح است که این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

پس شیب خط برابر $m = \frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ آن $n = -\frac{c}{b}$ است. توجه داشته باشید که عرض نقطه تلاقی خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

نتیجه : معادله‌ی برخی از خطوط مهم به صورت زیر است.

ردیف	عنوان	معادله	شیب
۱	محور طول ها	$y = ۰$	$m = ۰$
۲	محور عرض ها	$x = ۰$	تعریف نمی شود.
۳	نیمساز ربع اوّل و سوّم	$y = x$	$m = ۱$
۴	نیمساز ربع دوّم و چهارم	$y = -x$	$m = -۱$

تمرین۲۷ : معادله‌ی خطی به صورت $۶x + ۲y - ۴ = ۰$ است.

الف: شیب و عرض از مبدأ این خط را به دست آورید.

ب : محل تقاطع این خط با محور های مختصات را تعیین کنید.

ج : نمودار خط را رسم کنید.

تمرین۲۸ : نمودار هر یک از خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $y = -۲x + ۱$ پ) $y = -۲$ ث) $y = \frac{۱}{۳}x$

ب) $۲x + ۳y = ۶$ ت) $x = \frac{۳}{۲}$

تمرین ۲۹ : مقدار k را طوری تعیین کنید که شیب خط به معادله‌ی زیر برابر -۲ باشد.

$$kx + (k - ۲)y = -۳k$$

***

تمرین برای حل :

۳۰ : مقدار k را طوری تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(-۳,۰)$ و $B(k+۱,-۲)$ و $C(۳,۲)$ روی یک خط راست واقع باشند.

۳۱ : معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۳,۲)$ را بنویسید.

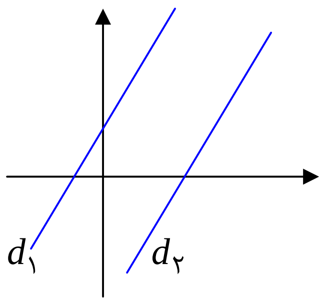
۳۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور عرض ها را در نقطه‌ای بـه عرض ۲ قطع کند.

۳۳ : نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۲)$ و $C(۰,-۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی میانـه‌ی وارد بـر ضـلع BC را بنویسید.

***

رابطه‌ی بین شیب های خطوط موازی

دو خط موازیند، اگر و تنها اگر شیب های مساوی داشته باشند.



$$m_۱ = m_۲ \leftrightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

تمرین ۳۴ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازیند.

$$y=-۲x+۳ \quad و \quad ۶x+۳y=۵$$

تمرین ۳۵ : معادلات دو خط زیر را در نظر بگیرید.

$$x-۴y=-۲ \quad و \quad ۲x+y=۵$$

الف) ثابت کنید که این دو خط متقاطع هستند.

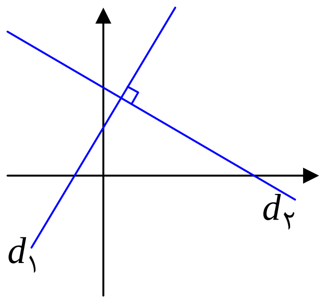
ب) مختصات نقطه‌ی تقاطع این دو خط را تعیین کنید.

ج) نمودار هر دو خط را رسم کنید و نقطه ی تقاطع آنها را تعیین کنید.

تمرین ۳۶ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطـه‌ی $P(-۱,۳)$ بگـذرد و مـوازی بـا خـط بـه معادلـه‌ی $۲x+y=۳$ باشد.

***

رابطه‌ی بین شیب های دو خط عمود بر هم



دو خط بر هم عمودند، اگر و تنها اگر حاصل ضرب شیب های آنها برابر ۱- باشد. به عبارتی دیگر اگر شیب خطی عکس و قرینه ی شیب دیگری باشد، آن دو خط بر هم عمودند.

$$m_۱ \times m_۲ = -۱ \leftrightarrow d_۱ \perp d_۲$$

تمرین۳۷ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر بر هم عمودند.

$$۳x - ۴y = -۲ \qquad \text{و} \qquad y = -\frac{۴}{۳}x + ۱$$

تمرین۳۸ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر خط بـه معادلـه‌ی $x + ۳y = ۴$ عمود باشد.

تمرین برای حل :

۳۹ : نقاط $A(۴,۰)$ و $B(۱,۳)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

۴۰ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول ها را در نقطه ای به طـول ۲ قطع کنـد و مـوازی خـط بـه معادله‌ی $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} = ۱$ باشد.

۴۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و عمود بر خـط بـه معادله‌ی $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} = ۱$ باشد.

۴۲ : نقاط $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ و $C(۷,۹)$ سه رأس از مربع $ABCD$ می باشند.

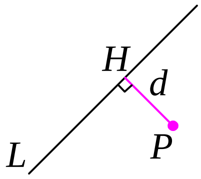
الف: معادله‌ی اضلاع AB و DC و BC را بنویسید.

ب : مختصات نقطه‌ی D را تعیین کنید.

ج : مربع را رسم کنید.

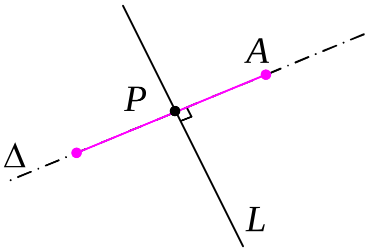
د : مساحت و محیط مربع را به دست آورید.

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی هر نقطه خارج یک خط، برابر طول پاره خطی از که از نقطه بر خط عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی هر نقطه، روی خط تا آن خط برابر صفر است.

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



حل : چون شیب خط L برابر $-\frac{۴}{۳}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادله‌ی خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می نویسیم.

$$\Delta : y=\frac{۳}{۴}x+h$$

و چون نقطه‌ی $A(۷,۵)$ روی خط Δ قرار دارد، داریم :

$$۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \rightarrow h=-\frac{۱}{۴}$$

لذا معادله‌ی خط Δ به صورت زیر است.

$$\Delta : y=\frac{۳}{۴}x+h \rightarrow y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \rightarrow ۳x+۴y=۱$$

اگر معادلات دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه‌ی P، محل برخورد این دو خط به دست می آید.

$$\begin{matrix} L: \\ \Delta: \end{matrix}\begin{cases} ۴x+۳y=۱۸ \\ ۳x-۴y=۱ \end{cases} \rightarrow x=۳ \ , \quad y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

واضح است که طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

همانطور که مشاهده می کنید، این روش برای حل مسئله، روشی نسبتاً طولانی است. می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد.

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_\circ , y_\circ)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=\circ$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$\boxed{d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل :

$$۴x+۳y=۱۸ \rightarrow ۴x+۳y-۱۸=\circ$$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{۲۵}{\sqrt{۲۵}}=۵$$

نتیجه : فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=\circ$ به شکل زیر است.

$$\boxed{d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

تمرین ۴۳ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۱,-۱)$ تا خط به معادله‌ی $۳x-۴y=-۳$ را به دست آورید.

تمرین ۴۴ : نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(\circ,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف : اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را حساب کنید.

❋❋❋

توجه : اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ سه رأس مثلثی باشند، می توان مساحت مثلث را به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه کرد. ثابت می شود که قدر مطلق عدد حاصل برابر مساحت مثلث است.

$$S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۱ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۴ \end{vmatrix}$$

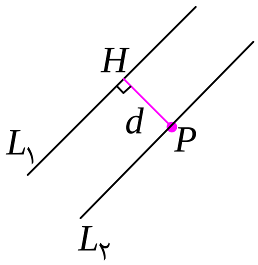
$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

مثال: نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(\circ,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت مثلث را به دست آورید.

حل :

$$\rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & \circ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(۹+۶+\circ+۴+\circ+۹)=۱۴$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی



فاصله‌ی دو خط موازی ، طول پاره خطی است که از هر نقطه ی واقع بر یکی بر دیگری عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی دو خط منطبق بر هم برابر صفر است.

فاصله ی دو خط موازی به معادلات :

$$L_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad و \quad L_2 : ax + by + c_2 = 0$$

به صورت زیر است.

$$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین۴۵ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$4x + 3y + 7 = 0 \quad و \quad 4x + 3y - 8 = 0$$

تمرین ۴۶ : اگر $A(6,3)$ و $B(7,0)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند و معادله‌ی ضلع CD از این مستطیل به صورت $3x + y = 1$ باشد. مساحت مستطیل را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۴۷ : یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۴۸ : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,-4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر۴ است. مقدار k را به دست آورید.

۴۹ : فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو خط به معادلات $2y - x + 1 = 0$ و $y + x - 4 = 0$ را از خط d به معادله‌ی $7x - 24y - 2 = 0$ را تعیین کنید.

۵۰ : خط L به معادله‌ی $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.[4]

۵۱ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

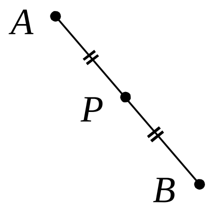
$$6x - 8y - 7 = 0 \quad و \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

---

[4]. توجه داشته باشید که شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است.

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه ای دیگر

نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی P گویند، هرگاه نقطه‌ی P وسط پاره خط AB باشد.



برای مطالعه : با توجه به این تعریف اگر $P(\alpha,\beta)$ باشد، در این صورت، واضح است که

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{۲}\rightarrow\alpha=\frac{x_A+x_B}{۲}\rightarrow x_A+x_B=۲\alpha\rightarrow x_B=۲\alpha-x_A$$

$$y_P=\frac{y_A+y_B}{۲}\rightarrow\beta=\frac{y_A+y_B}{۲}\rightarrow y_A+y_B=۲\beta\rightarrow y_B=۲\beta-y_A$$

لذا مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ به صورت زیر است.

$$\begin{cases}x_B=۲\alpha-x_A\\ y_B=۲\beta-y_A\end{cases}$$

نتیجه : مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات به شکل زیر است.

$$\begin{cases}x_B=-x_A\\ y_B=-y_A\end{cases}$$

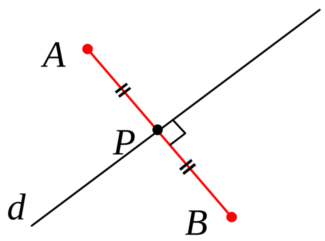
تمرین ۵۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ را نسبت به نقطه ی $P(۳,۰)$ به دست آورید.

تمرین ۵۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۵,-۲)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

***

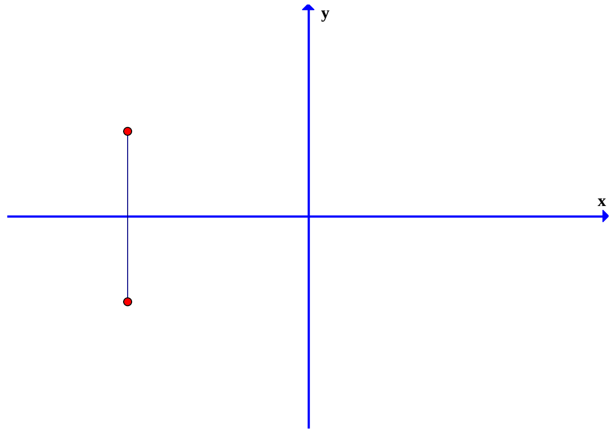
قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک

نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d گویند، هرگاه خط d عمود منصف پاره خط AB باشد.

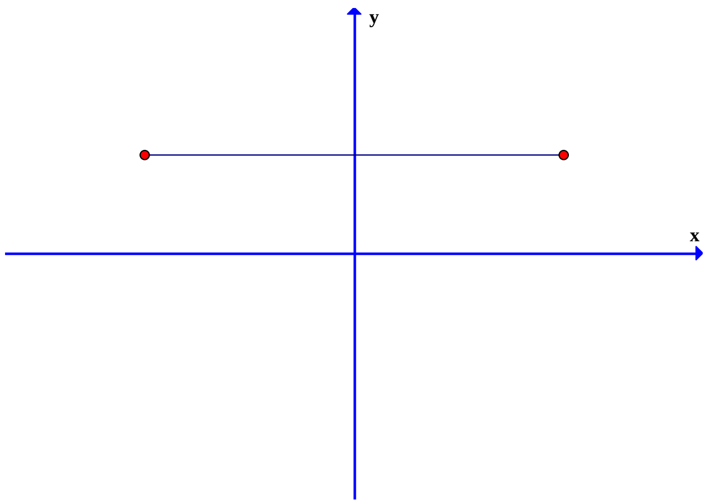


نتیجه :

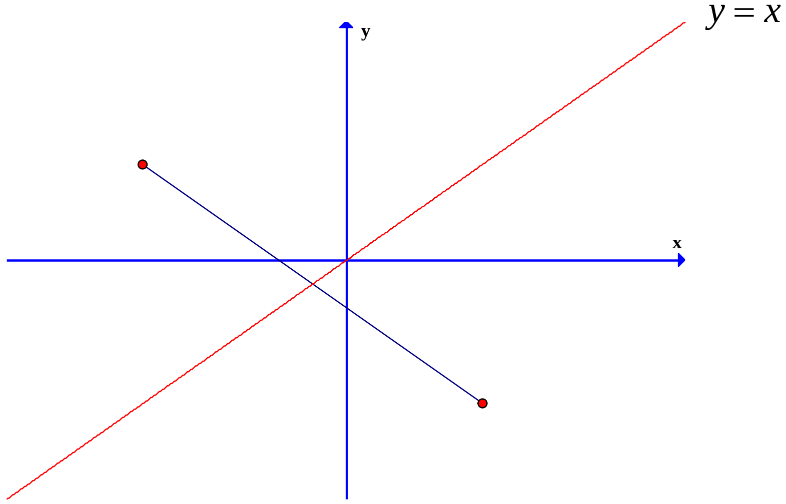
۱ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ نسبت به محور طول ها (خط $y=\cdot$) به صورت $B(x_\circ, -y_\circ)$



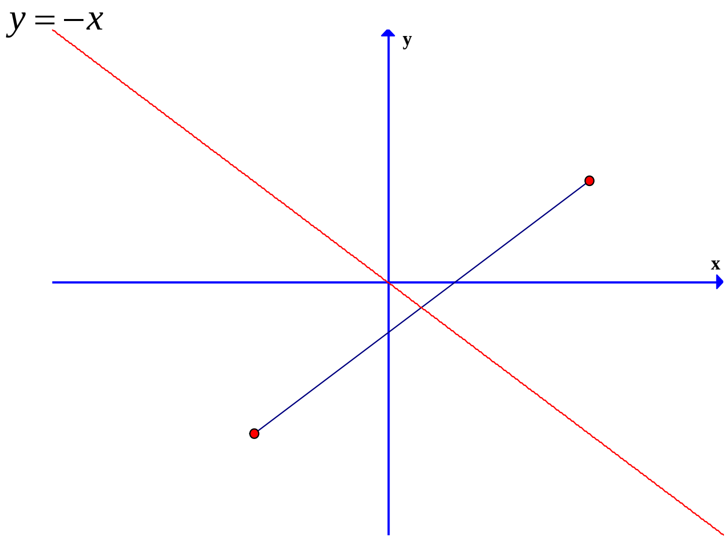
۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ نسبت به محور عرض ها (خط $x=\cdot$) به صورت $B(-x_\circ, y_\circ)$



۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $a(x_\circ, y_\circ)$ نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم (خط $y=x$) به صورت $B(y_\circ, x_\circ)$



۴ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ نسبت به نیمساز ربع دوّم و چهارم (خط $y=-x$) به صورت $B(-y_\circ , -x_\circ)$



تمرین ۵۴ : نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ داده شده است. بازتاب این نقطه را در حالت های مختلف زیر بدست آورید.

الف : نسبت به محور x ها　　　　ب : نسبت به محور y ها

ج : نسبت به محور $y=x$　　　　د : نسبت به محور $y=-x$

حل:　　$A(۲,-۳ \to)B(۲,۳)$

❋❋❋

درس دوّم : معادلات و توابع درجه ی دوّم

در این درس ابتدا با بحث های تکمیلی پیرامون معادله و تابع درجه‌ی ۲ و آشنا و سپس با معرفی نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم و مفهوم صفر تابع درجه‌ی دوّم، می توان بسیاری از مسائل ریاضیات را بررسی و حل کرد.

قسمت اوّل : یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سال گذشته با معادله‌ی درجه‌ی ۲ آشنا شده اید. حتماً به یاد دارید که برای حل این معادله روش های متفاوتی وجود دارد. روش تجزیه و روش کلاسیک (کلی) را به خاطر دارید. بهتر است قبل از ورود به بحث این دو روش را در قالب مثال یادآوری کنیم.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x^۲+۵x-۳=۰$$

حل به روش تجزیه :

$$۲x^۲+۵x-۳=۰\to\frac{۱}{۲}(۲x-۱)(۲x+۶)=۰\to(۲x-۱)(x+۳)=۰$$

$$\to\begin{cases}۲x-۱=۰\to x=\frac{۱}{۲}\\ x+۳=۰\to x=-۳\end{cases}$$

حل به روش کلاسیک : $c=-۳$ و $b=۵$ و $a=۲$

$\Delta=b^۲-۴ac=(۵)^۲-۴(۲)(-۳)=۲۵+۲۴=۴۹$ معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد.

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)+\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵+۷}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)-\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵-۷}{۴}=\frac{-۱۲}{۴}=-۳$$

یادآوری : هر معادله به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\neq۰$ ، یک درجه‌ی دوّم است. یک روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به صورت زیر است. این روش را روش کلی یا روش کلاسیک می نامند.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد ، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب $x^{۲}$ را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_{۱} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad \text{و} \qquad x_{۲} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف[1]) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

تمرین ۱ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $۳k^{۲} = ۱۳k + ۱۰$ ب) $r^{۲} + ۲k + ۵ = ۰$ ج) $۹u^{۲} + ۱۲u + ۴ = ۰$

***

قسمت دوّم : حل معادلات به روش تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله‌ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله‌ی اوّلیه را نیز به دست آورد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{۴} - ۳x^{۲} - ۱۰ = ۰$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^{۲} = t$. لذا خواهیم داشت:

[1]. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوّم

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t-5)(t+2) = 0 \to \begin{cases} t = 5 \to x^2 = 5 \to x = \pm\sqrt{5} \\ t = -2 \to x^2 = -2 \quad \text{غ م} \end{cases}$$

تمرین برای حل : معادله های زیر را حل کنید.

۲) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ۳) $(x^2 - 3)^2 - 3x^2 + 11 = 0$ ۴) $4^x - 12(2^x) + 32 = 0$

***

قسمت سوّم : مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه هـای آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ بـه شـکل $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه های زیر به دست می آید.

مجموع ریشه ها $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

حاصل ضرب ریشه ها $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

تمرین۵ : بدون حل معادله ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$3x^2 + 5x - 1 = 0$$

برای مطالعه : روابط به مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲ را می توان به صورت زیـر اثبات کرد.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

تمرین برای حل :

۶ : بدون حل معادله و فقط با استفاده از S و P و Δ در مورد وجود و علامت ریشه های معادله‌ی $5x^2-7x-5=0$ بحث کنید.

***

قسمت چهارم : تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^2-Sx+P=0$$

تمرین ۷ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی بنویسید که مجموع ریشه های آن ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

برای مطالعه : اثبات این معادله به صورت زیر است.

$$ax^2+bx+c=0\xrightarrow{\div a}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\to x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0$$

$$\to x^2-Sx+P=0$$

تمرین برای حل :

۸ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ ریشه های آن باشند.

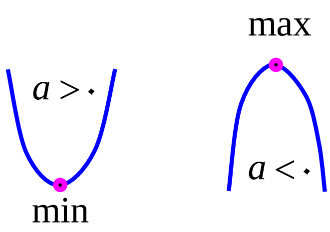
۹ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ریشه های آن باشند.

۱۰ : اندازه‌ی طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۱۱ سانتی متر و مساحت آن ۶ سانتی متر مربع باشد.

***

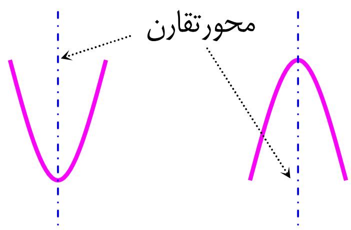
قسمت پنجم : یاد آوری تابع درجه ۲ (سهمی)

در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه‌ی ۲ دارای معادله ای به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ (که در آن $a\neq ۰$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.



الف : اگر $a>۰$ باشد نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر $a<۰$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم)است.

ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله‌ی آن بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد و همواره موازی محور y ها است.



همچنین معادله‌ی محور تقارن سهمی نیز بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد.

برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

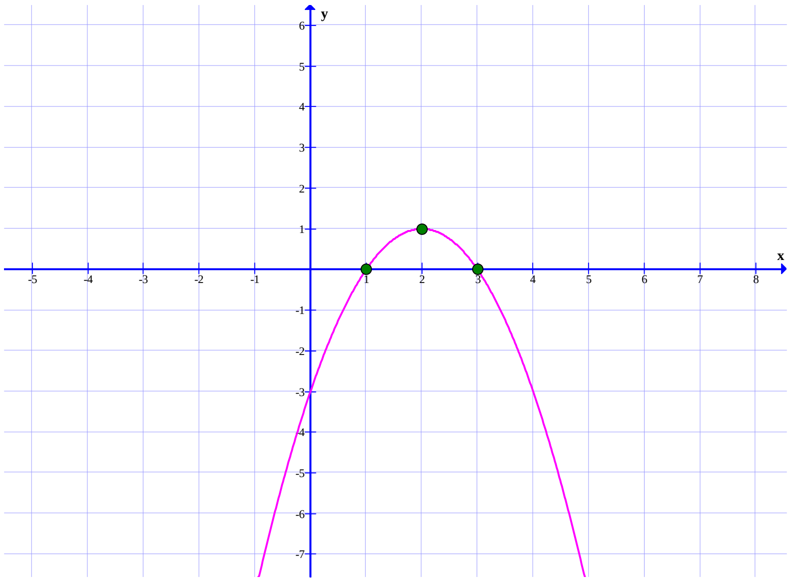
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y=-x^{۲}+۴x-۳$ را رسم کنید.

حل : ابتدا طول رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$$

حل جدول زیر را تکمیل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



***

تمرین ۱۱: نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^{۲} - ۲x - ۳$

ب) $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$

ج) $y = -۴x^{۲} + ۸x + ۱$

تمرین ۱۲: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۳$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : چون $a = -۱$ منفی است. پس سهمی رو به پایین است. لذا سهمی دارای نقطه‌ی ماکزیمم است.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = ۱$$

همچنین بیشترین مقدار تابع به ازای $x = ۱$ می باشد.

$$f(۱) = -(۱)^{۲} + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

تذکر : در این تمرین نقطه‌ی $(۱,۴)$ رأس سهمی و مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۴ می باشد.

تمرین برای حل :

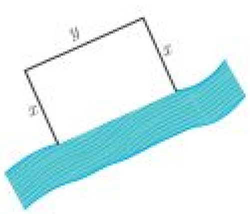
۱۳ : مقدار m را چنان بیابید که $x=۲$ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=mx^{۲}+(m-۱)x+۱$ باشد.

۱۴ : کمترین مقدار تابع $f(x)=۳x^{۲}-۱۲x+۵$ را تعیین کنید.

۱۵ : بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱$ را محاسبه کنید.

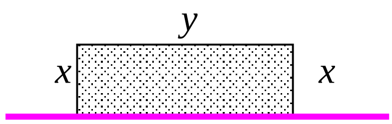
۱۶ : اگر $۳x+۵y=۱۵۰$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

حل چند تمرین کاربردی :



۱۷ : قرار است در کنار یک رودخانه ، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. بیشترین مساحت ممکن این محوطه را تعیین کنید.

حل :



$y+۲x=۱۲۰ \rightarrow y=۱۲۰-۲x$

مساحت مستطیل $S=xy$

$S(x)=x(۱۲۰-۲x) \rightarrow S(x)=۱۲۰x-۲x^{۲}$

تابع به دست آمده ، یک تابع درجه‌ی دوّم است و در آن $a=-۲<۰$ می باشد. پس تابع دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{۲(-۲)}=۳۰$$

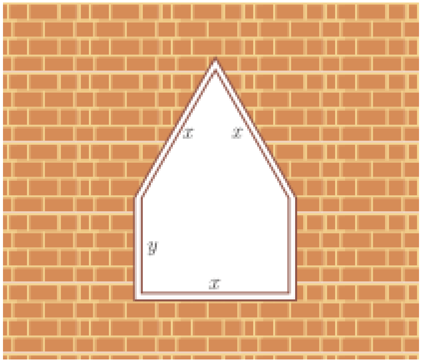
$$S(۳۰)=۱۲۰(۳۰)-۲(۳۰)^{۲}=۳۶۰۰-۱۸۰۰=۱۸۰۰\ m^{۲}$$

توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y=۱۲۰-۲(۳۰)=۶۰$$

$$S=xy=(۳۰)(۶۰)=۱۸۰۰\ m^{۲}$$

۱۸ : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



حل : با توجه به شکل داریم :

$$P = ۴ \rightarrow ۳x + ۲y = ۴ \rightarrow y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$$ محیط پنجره

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟) ، پس می توان نوشت:

$$S = x.y + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$ مساحت پنجره

حال اگر به جای y معادل آن را بر حسب x قرار دهیم. داریم :

$$S = x.(۲ - \frac{۳}{۲}x) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = ۲x - \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = \frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}x^۲ + ۲x$$

این تابع ، یک تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) است و دارای ماکزیمم است (چرا؟). لذا داریم.

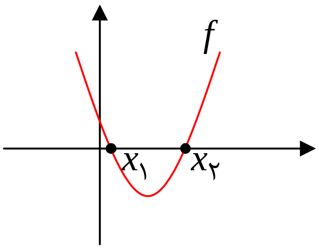
$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(\frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴})} = \frac{۲}{\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{۴ - \sqrt{۳}} = ۰/۹۴ \ m$$

$$y_{\max} = ۲ - \frac{۳}{۴}x = ۲ - \frac{۳}{۴}(۰/۹۴) = ۰/۵۹ \ m$$

توجه : پنجره‌ی موضوع این تمرین، زمانی بیشترین نوردهی دارد که بزرگترین مساحت را داشته باشد.

***

قسمت ششم : صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)

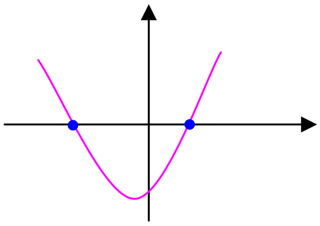


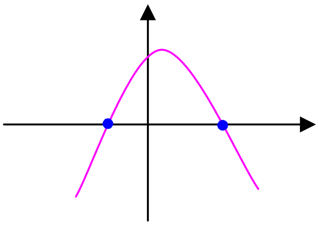
$f(x_{۱})=f(x_{۲})=۰$

همانطور که می دانیم ، نمودار هر تابع درجه‌ی ۲ ، یک سهمی است و دارای معادله ای به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است. بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار سهمی با محور طول ها را صفر تابع می نامند. بدیهی است کـه در ایـن نقطـه مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنابر این ، صفر تابع f همان ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=۰$ است.

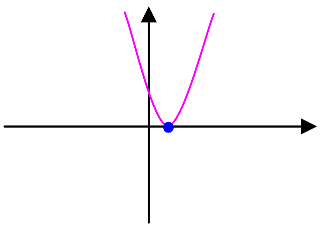
نتیجه : بر اساس مفهوم فوق می توان نتیجه گرفت که :

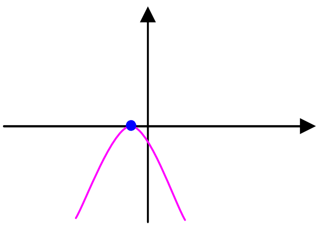
الف : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می کند. بنابراین معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.



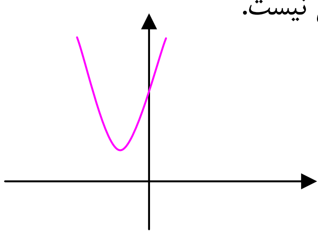


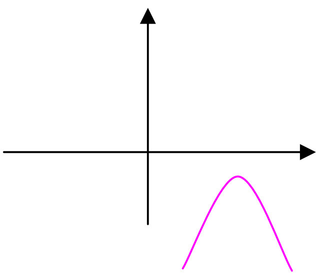
ب : نمودار سهمی بر محور طولها ممـاس اسـت. بنـابراین معادلـه‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای ریـشه‌ی مضاعف است.





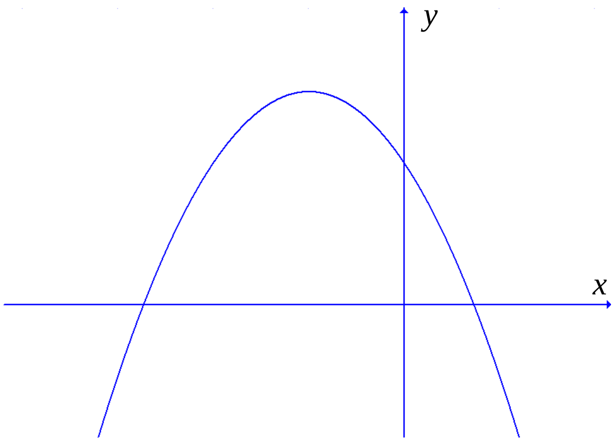
ج : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع نمی کند. بنابراین معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.





حل چند تمرین :

۱۹ : نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=0$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به پایین است، لذا $a<0$

دو ریشه مختلف العلامه اند و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بیشتر است. لـذا مجمـوع ریـشه هـا منفی است. پس :

$$S<0 \rightarrow \frac{-b}{a}<0 \rightarrow \frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

چون دو ریشه مختلف العلامه اند. لذا حاصل ضرب آنها منفی است. پس :

$$P<0 \rightarrow \frac{c}{a}<0 \xrightarrow{a<0} c>0$$

توجه :

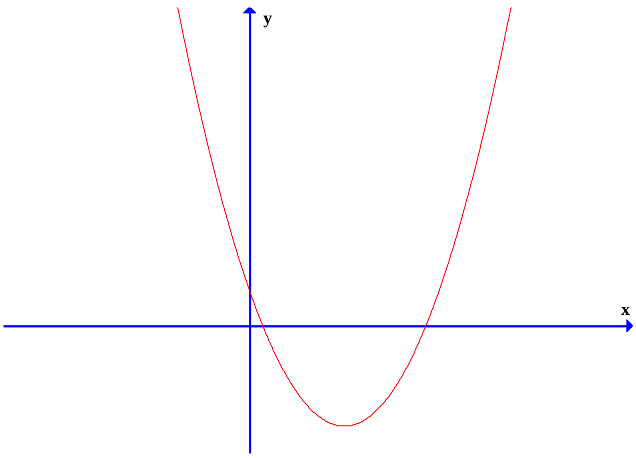
الف : به روش دیگری می توان علامت b را نیز تعیین کرد. در این روش طول رأس سـهمی را در نظـر مـی گیریم. مثلاً در این تمرین با توجه به نمودار معلوم است که طول رأس سهمی منفی است. لذا :

$$\frac{-b}{2a}<0 \rightarrow \frac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

ب : به روش دیگری نیز می توان علامت c را تعیین کرد. با توجه به اینکه تـابع محـور y هـا را در نقطـه-ی $(\cdot,c)$ قطع می کند، لذا می توان به توجه به نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور y ها ، علامت c را تعیین کرد. در تمرین فوق ، از روی نمودار واضح است که محل تقاطع نمودار با محور عرض ها (مقدار c) بالای محور x ها است. پس $c>\cdot$

***

۲۰ : نمودار زیر، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=\cdot$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=\cdot$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به بالا است، لذا $a>\cdot$

دو ریشه هم علامت و مثبت می باشند. لذا مجموع آنها مثبت است. پس

$$S>\cdot \rightarrow \frac{-b}{a}>\cdot \rightarrow \frac{b}{a}<\cdot \xrightarrow{a>\cdot} b<\cdot$$

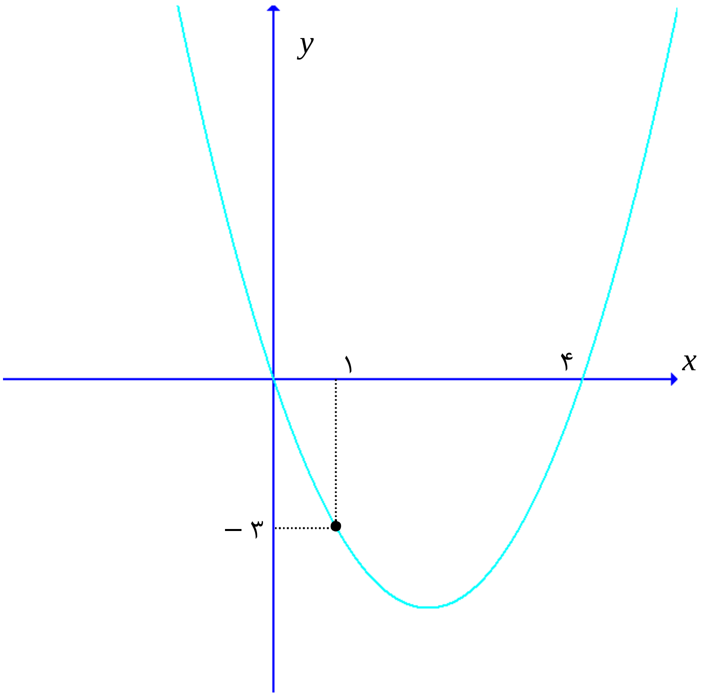
چون دو ریشه مثبت هستند، لذا حاصل ضرب آنها نیز مثبت است. پس

$$P>\cdot \rightarrow \frac{c}{a}>\cdot \xrightarrow{a>\cdot} c>\cdot$$

***

۲۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : سه نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} ۰=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \to c=۰$$

$$B\left|\begin{matrix}۱\\-۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} -۳=a(۱)^{۲}+b(۱)+c \to a+b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=۰} a+b=-۳$$

$$C\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} ۰=a(۴)^{۲}+b(۴)+c \to ۱۶a+۴b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=۰} ۱۶a+۴b=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۴a+b=۰$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

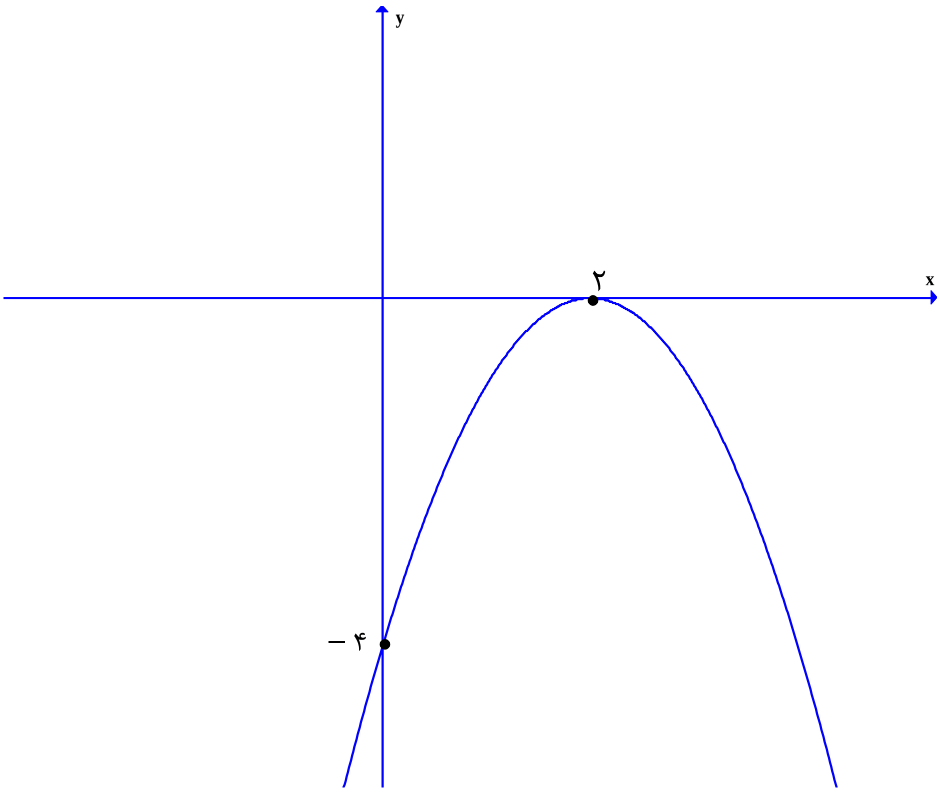
$$\begin{cases}a+b=-۳\\۴a+b=۰\end{cases} \to a=۱\ ,\ b=-۴$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
y		+	۰	-	۰	+	

۲۲ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۴\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۴=a(۰)^{۲}+b(۰)+c\rightarrow c=-۴$$

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}۰=a(۲)^{۲}+b(۲)+c\rightarrow ۴a+۲b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=-۴}۴a+۲b=۴\rightarrow ۲a+b=۲$$

نقطه‌ی B ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}}۲=\frac{-b}{۲a}\rightarrow ۴a+b=۰$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

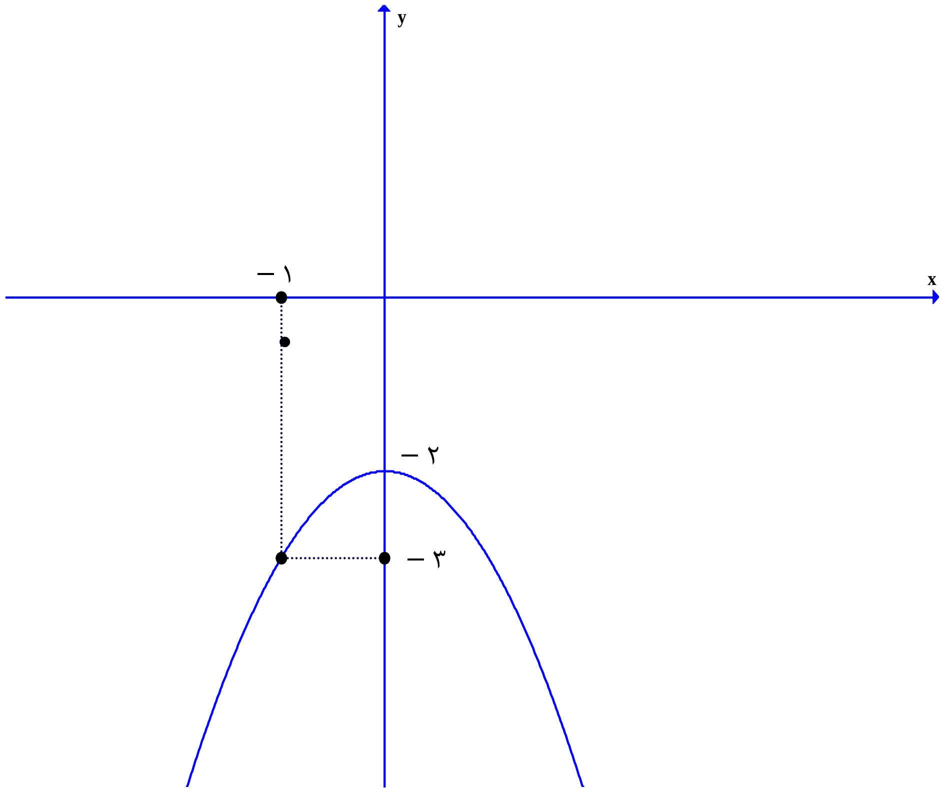
$$\begin{cases}۲a+b=۲\\۴a+b=۰\end{cases}\rightarrow a=-۱\,,\,b=۴$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		-	۰	-	

۲۳ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۲ \end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^۲+bx+c} -۲ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \to c = -۲$$

نقطه‌ی A ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$A\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۲ \end{matrix}\right. \xrightarrow{x_۰ = \frac{-b}{۲a}} ۰ = \frac{-b}{۲a} \to b = ۰$$

$$B\left|\begin{matrix} -۱ \\ -۳ \end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^۲+bx+c} -۳ = a(-۱)^۲ + b(-۱) + c \to a - b + c = -۳$$

$$\xrightarrow{c=-۲} a - b = -۱$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} a - b = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \to a = -۱$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم. (چون محور طولها را قطع نمی کند پس تابع ریشه ندارد.)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		$-$ $\quad$ $-$	

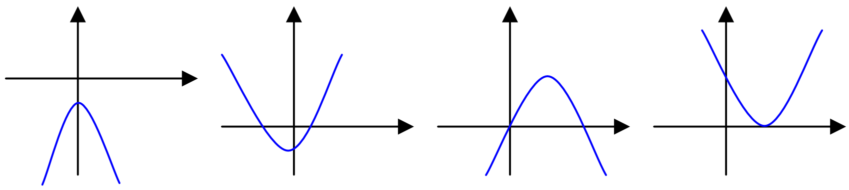
***

توجه ۱ : محل تقاطع نمودار سهمی به معادله ی $y = ax^۲ + bx + c$ با محور عرضها مقدار c را نشان می دهد. لذا در هر سهمی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد ، $c = ۰$ است.

توجه۲ : اگر نمودار سهمی نسبت به محور y ها متقارن باشد، محور تقارن آن یعنی خط $x = \frac{-b}{۲a}$ روی محور y ها منطبق است. پس $x = ۰$ می باشد و در نتیجه $b = ۰$ است.

تمرین برای حل :

۲۴ : جدول زیر را با توجه به نمودار های داده شده کامل کنید. ($y = ax^۲ + bx + c$)



(د) $\qquad$ (ج) $\qquad$ (ب) $\qquad$ (الف)

	الف	ب	ج	د
علامت Δ				
علامت a				
علامت b				
علامت c				
تعداد صفر های تابع				

۲۵ : معادله‌ی مسیر حرکت یک توپ بعد از شوت آن، یک تابع درجه دو با ضابطه‌ی $y = -\frac{۱}{۴۰}x^۲ + x$ است. در این معادله x مسافت طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.

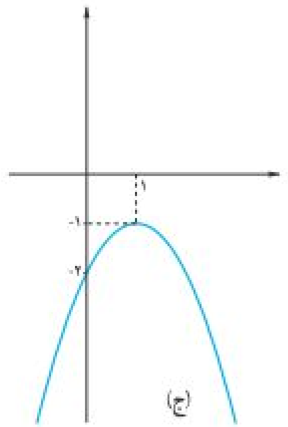
الف : حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

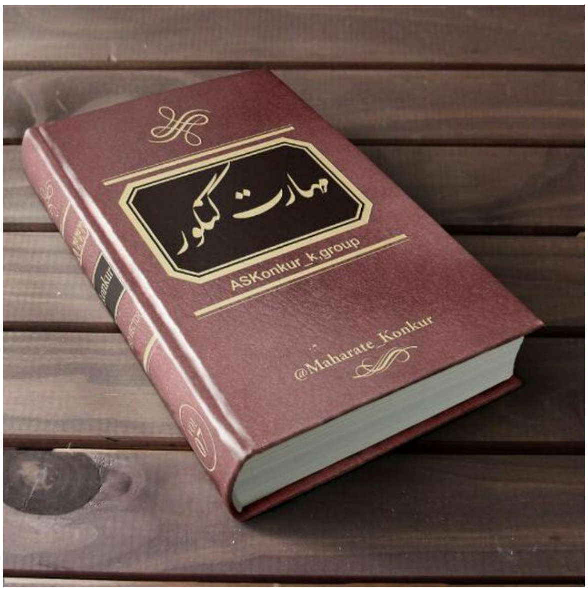
ب : تعیین کنید که حداکثر مسافت طی شده توسط این توپ چقدر است؟

ج : نمودار حرکت توپ را رسم کنید.

۲۶ : معادله‌ی یک سهمی به صورت $y = a(x-۱)(x-۲)$ است، مقدار a را چنان تعیین کنید که این سهمی محور عرض ها را در نقطه ای به عرض۴ قطع کند.

۲۷ : معادله‌ی سهمی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.





درس سوّم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

در این درس به روش های حل معادلات گویا و معادلات رادیکالی می پردازیم. این دو نوع معادله بـه جهـت کاربردهای بسیار زیاد آنها از اهمیت خاصی برخوردارند.

قسمت اوّل : معادلات گویا

هر معادله که در آن متغیر معادله در مخرج کسر باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت گویا یا به اختصار معادله‌ی گویا می نامند. مانند معادلات زیر :

ب) $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$ الف) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

برای حل چنین معادلاتی، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج هـا را محاسـبه کـرده[1] و در تمـام کـسرها ضرب می کنیم. سپس معادله‌ی بدست آمده را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که بـه ازای آن مخرج هیچ کسری صفر نشود[2].

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} A=x \\ B=x^{۲}-۲x=x(x-۲)\xrightarrow{\text{ک م م}}x(x-۲) \\ C=x-۲ \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}\rightarrow \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۵}{x}}-\overset{\times x(x-۲)}{\frac{۴}{x(x-۲)}}=\overset{\times x(x-۲)}{\frac{x-۴}{x-۲}}$$

$$\rightarrow ۵(x-۲)-۴=x(x-۴)\rightarrow ۵x-۱۰-۴=x^{۲}-۴x\rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰$$

$$\rightarrow (x-۷)(x-۲)=۰\rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

---

1. برای این کار ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و سپس حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر را تعیین می کنیم.

2 . اگر معادله‌ی گویا به صورت تساوی دو کسر بیان شده باشد. بهتر است، از خاصیت ضرب طرفین و وسطین استفاده کنیم.

تمرین برای حل : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{2x+3}{2x-2}-\frac{5}{x^2-1}=\frac{2x-3}{2x+2}$

۲) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

۳) $\frac{3}{2x}=\frac{x+2}{x^2-3x}$

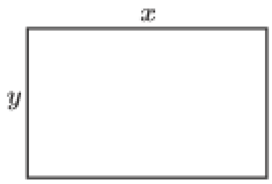
۴) $\frac{1}{x^2-2x+1}=\frac{3}{x^2-2x+3}$

۵) $\frac{n^2-2n+2}{n^2-2n}-\frac{1+n}{n}=\frac{n-1}{n-2}$

۶) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x}$

حل چند مسئله‌ی کاربردی :

۷ : مستطیل طلایی ، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن بـه طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، می توان نوشت:



$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.

حال اگر عرض مستطیل را برابر یک در نظر بگیریم، واضح است که مقدار x همان نسبت طلایی است. برای محاسبه ی مقدار x کافی است که معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}\rightarrow x^2=x+1\rightarrow x^2-x-1=0\xrightarrow{\Delta=5}\begin{cases}x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

واضح است که جواب منفی قابل قبول است. عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ است بـه عـدد طلایی معروف است که از دوران باستان مورد توجه بوده است.

***

۸ : در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. امّا اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوّم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند.

حل : اگر کارگر اوّل در x روز کار را تمام می کند، پس کارگر دوّم همین کـار را در $x+15$ روز تمـام مـی کند. لذا

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18}$$

$$\xrightarrow{\times 18x(x+15)=} 18(x+15)+18x=x(x+15)\to 18x+270+18x=x^2+15x$$

$$\to x^2-21x-270=0 \xrightarrow{\Delta=(-21)^2-4(1)(270)=441+1080=1521} \begin{cases} x_1=\dfrac{21+39}{2}=30 \\ x_2=\dfrac{21-39}{2}=-9 \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-9$ قابل قبول نیست.

***

۹ : در یک مغازه‌ی ماهی های تزئینی، ماهی های شور در محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها ، ۲۰۰ کیلو گرم آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند.

حل : فرض می کنیم به اندازه‌ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی ، محلول را با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلو گرم نمک وجود دارد.

$\frac{4}{100}\times 200=8$ کیلو

اگر x کیلوگرم نمک به ایـن محلـول بیفـزاییم، میـزان نمـک آب $x+8$ کیلـوگرم مـی شـود و وزن کـل محلول $x+200$ کیلوگرم می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x}=\frac{7}{100}$$

$$\frac{8+x}{200+x}=\frac{7}{100}\to 800+100x=1400+7x\to 93x=600\to x=\frac{600}{93}$$ کیلو گرم

۱۰ : خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی(ره) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت متوسط قطار به میزان ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مدت زمان رفت و برگشت این قطار را محاسبه کنید.

حل : با توجه به صورت مسئله واضح است که زمان رفت قطار برابر $\frac{۶۰}{v}$ و زمان برگشت آن $\frac{۶۰}{v-۱۰}$ است.

همچنین اختلاف زمانی رفت و برگشت نیم ساعت $(\frac{۱}{۲})$ می باشد. لذا می توان نوشت:

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون این معادله را حل می کنیم.

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۲v(v-۱۰)}۱۲۰v-۱۲۰(v-۱۰)=v(v-۱۰)$$

$$\rightarrow ۱۲۰v-۱۲۰v+۱۲۰۰=v^{۲}-۱۰v\rightarrow v^{۲}-۱۰v-۱۲۰۰=۰$$

$$\rightarrow (v-۴۰)(v+۳۰)=۰\rightarrow v=۴۰ \quad \text{و} \quad v=-۳۰\ (\text{غیر قابل قبول})$$

لذا بر اساس این مسئله معلوم می شود که زمان رفت قطار برابر $\frac{۶۰}{v}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$ ساعت و زمان برگشت آن ، برابر $\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{۴۰-۱۰}=\frac{۶۰}{۳۰}=۲$ ساعت است.

۱۱ : دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود. یعنی میانگین هر آزمون او در پنج هفته‌ی اوّل به صورت زیر بود.

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفته‌ی ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد. به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. حساب کنید که از هفته‌ی ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره‌ی ۹ گرفته است؟

حل : ابتدا الگوی زیر را تشکیل می دهیم.

شماره‌ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	....	؟
امتیاز کسب شده			۳۶			۹	....	۹
میانگین			۷/۲				۹	

گیریم که آرمان در بعد از هفته‌ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون های آرمان برابر $n+۵$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $۹n+۳۶$ خواهد شد. لذا میانگین کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}=۸ \rightarrow ۹n+۳۶=۴۰+۸n \rightarrow n=۴$$

یعنی آرمان بعد از هفته‌ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

۱۲ : اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

حل : گیریم که ماشین سریعتر A و دیگری B باشد. اگر زمان انجام کار توسط ماشین A برابر t باشد، زمان انجام کار توسط ماشین B مساوی $۲t$ است. با توجه به صورت مسئله می توان نوشت:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}$$
$$\xrightarrow{\times ۴t} ۴+۲=t \rightarrow t=۶$$

زمان مورد نیاز برای ماشین A برای کار به تنهایی $\rightarrow t=۶$

زمان مورد نیاز برای ماشین B برای کار به تنهایی $\rightarrow ۲t=۲(۶)=۱۲$

۱۳ : علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی۱۶ صفحه ای را منتشر می کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حساب کنید که اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت نیاز دارد؟

$$\frac{۱}{r}+\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{۱}{۸۰}\xrightarrow{\times ۲۴۰r} ۲۴۰+۲r=۳r \rightarrow r=۲۴۰ \text{ min}$$

قسمت دوّم : معادلات رادیکالی

هر معادله که در آن متغیر معادله در زیر رادیکال (با فرجه‌ی دوّم) باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت اصم یا رادیکالی می نامند. مانند معادلات زیر :

الف) $1+\sqrt{x+2}=x-3$ ب) $2\sqrt{x}=\sqrt{3x+4}$

برای حل چنین معادلاتی ، در یک مرحله‌ی مناسب طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم تا یک معادله‌ی بدون رادیکال به دست آید. سپس این معادله را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که

الف : به ازاء آن عبارت زیر رادیکال منفی نباشد. ب : معادله به ازای آن برقرار باشد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1+\sqrt{x+2}=x-3$$

حل:

$$1+\sqrt{x+2}=x-3 \rightarrow \sqrt{x+2}=x-4 \rightarrow (\sqrt{x+2})^2=(x-4)^2$$
$$\rightarrow x+2=x^2-8x+16$$
$$\rightarrow x^2-9x+14=0 \rightarrow (x-7)(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{5m-1}+3=0$ ۴) $2\sqrt{3-2x}+x=3$

۲) $\sqrt{3x-5}=\sqrt{x-2}+1$ ۵) $\sqrt{15+\sqrt{2x-80}}=5$

۳) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ ۶) $\dfrac{1}{\sqrt{u-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{u}}=0$

۱۵ : عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر۶ شود.

۱۶ : بدون حل، توضیح دهید که چرا معادله های زیر فاقد جواب حقیقی می باشند.

الف) $\sqrt{t}+2=0$ ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-3}+1=0$ ج) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

۱۷: مقدار k را از تساوی مقابل حساب کنید. $v=\sqrt{\frac{۲k}{m}}$

۱۸ : معادله ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد. مسئله چند جواب دارد.

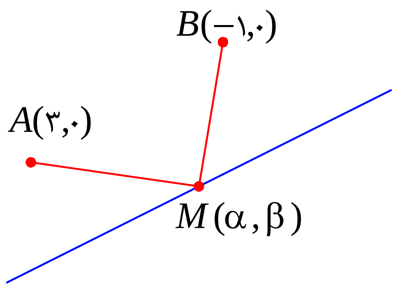
***

حل چند مسئله‌ی کاربردی

۱۹ : نقطه ای روی خط $y=۲x+۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

حل : فرض کنیم کـه $M(\alpha,\beta)$ نقطـه‌ی مـورد نظـر باشـد. چـون ایـن نقطـه روی خـط $y=۲x+۱$ پس $\beta=۲\alpha+۱$

از طرفی



$$MA=MB$$

$$\to\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}=\sqrt{(x_B-x_M)^۲+(y_B-y_M)^۲}$$

$$\to(۳-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲=(-۱-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲$$

$$\to ۹-۶\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۱+۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲\to ۹-۶\alpha=۱+۲\alpha\to\alpha=۱$$

$$\xrightarrow{\beta=۲\alpha+۱}\beta=۲(۱)+۱=۳$$

$$\therefore\quad M(۱,۳)$$

۲۰: دانش آموزان کلاس سن دبیر حسابان را از او پرسیدند. گفت : وقتی فرزندم به دنیا آمـد، مـن ۳۰ سـال داشتم و اکنون سن او جذر سن من است. حال شما سن من را حساب کنید؟

حل : اگر سن دبیر حسابان x باشد، سن فرزند او $x-۳۰$ خواهد بود. لذا می توان نوشت:

$$\sqrt{x} = x - ۳۰$$

$$\to x = (x - ۳۰)^۲ \to x = x^۲ - ۶۰x + ۹۰۰ \to x^۲ - ۶۱x + ۹۰۰ = ۰$$

$$\to (x - ۳۶)(x - ۲۵) = ۰ \to \begin{cases} x = ۳۶ \\ x = ۲۵ \end{cases}$$

که جواب $x = ۲۵$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

۲۱ : اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت. اگر $t = \sqrt{۱۰ - \frac{h}{۵}}$ ، حساب کنید که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار می گیرد.

حل :

$$t = \sqrt{۱۰ - \frac{h}{۵}} \xrightarrow{t=۲} ۲ = \sqrt{۱۰ - \frac{h}{۵}} \to ۴ = ۱۰ - \frac{h}{۵} \to -۶ = -\frac{h}{۵} \to h = ۳۰ \ \ m$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri