Subject:
Year: Month: Date:

هندسه: شاخه‌ای از ریاضیات می‌باشد که پدیده های اطراف ما را شبیه سازی می‌کند.

و مفاهیم آن شهودی و ملموس می‌باشد.

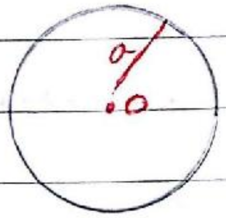
مفاهیم هندسه: ۱- تعاریف: مفاهیمی هستند که به وسیله‌ی اسمی مشخص می‌شوند و پذیرفتن آنها نیاز به دلیل ندارد. ۲- اصول: مفاهیمی هستند که پذیرفتن درستی آنها نیاز به دلیل ندارد (بدیهی). ۳- قضایا: مفاهیم کلی‌ای هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند.

یادآوری: حالت هم نهشتی دو مثلث. (ض ز ض) - (ض ض ض) - (ز ض ز)

(و ز) - (و ض) مخصوص مثلث های قائم زاویه.

درس اول " ترسیم های هندسی و استدلال "

۱- نقاطی را تعیین کنید که از نقطه O به فاصله a باشد.

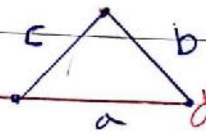


تمامی نقاط روی دایره‌ی به مرکز O و شعاع a قرار می‌گیرند.

Subject:

Year: Month: Date:

۲. روش رسم یک مثلث با طول اضلاع a، b، c را توضیح دهید.

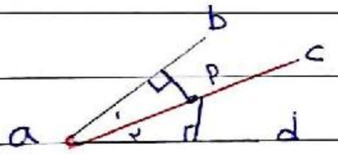


a را می‌کشیم و سپس با پرگار ۲ کمان از دو سر a به اندازه b و c می‌کشیم و بعد متصل

برخی خواص نیم‌ساز و ترسیم آن

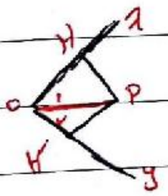
نیم‌ساز یک زاویه: نیم‌خطی که از رأس زاویه رسم می‌شود و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

۱. ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



$$\left.\begin{array}{l} aP = aP \\ \hat{a}_1 = \hat{a}_2 \end{array}\right\} \text{(وز)} \Rightarrow$$

۲. ثابت کنید نقطه‌ای که فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی نیم‌ساز زاویه قرار دارد.



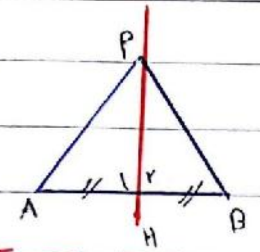
$$\left.\begin{array}{l} PH = PH' \\ OP = OP \end{array}\right\} \text{(وض)} \Rightarrow O\hat{P}H \cong OPH'$$

عمود منصف: به خطی که در وسط یک پاره‌خط بر آن عمود رسم می‌شود.

سؤال: ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک اندازه است؟

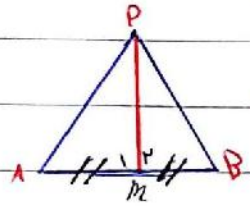
ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:



$$\left.\begin{array}{l} PH = PH \\ H_1 = H_2 \\ AB = HB \end{array}\right\} \text{(ض زض)} \Rightarrow \overset{\Delta}{P\hat{A}H} \cong \overset{\Delta}{P\hat{B}H} = P' = PB$$

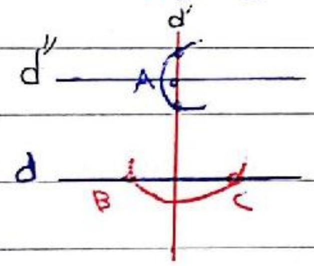
سؤال: ثابت کنید اگر فاصله یک نقطه از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه روی



عمود منصف قرار دارد. از P به وسط AB وصل می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} PA = PB \\ Am = Bm \\ Pm = Pm \end{array}\right\} \text{(ض ض ض)} \Rightarrow \overset{\Delta}{P\hat{A}m} \cong \overset{\Delta}{P\hat{m}B} = m_1 = m_2$$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید.

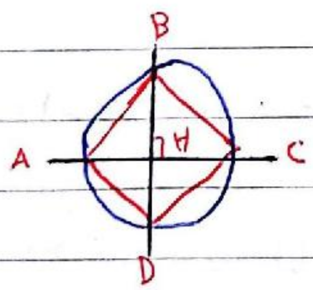


رسم: از نقطه ی A خط d' را عمود بر d رسم می کنیم

و سپس در نقطه d'' بر d' عمود رسم می کنیم چون

دو خط d و d'' هر دو بر d' عمود هستند پس خودشان موازی اند.

روش رسم مربعی که یک قطر آن داده شده.



رسم: قطر AC را رسم می کنیم سپس عمود منصف AC را

رسم می کنیم تا AC را در نقطه H قطع کند به مرکز H و شعاع AH

دایره ای رسم می کنیم و نقاط به دست آمده را به یکدیگر متصل می کنیم.

Subject:
Year: Month: Date:

« فصل دوم »

« استدلال »

روش های استدلال در هندسه : استقرائی - استنتاجی - غیرمستقیم (برهان خُلف)

استقرائی : نتیجه گیری کلی بر پایه ی مجموعه ای از مشاهدات و اندازه گیری کردن و تکرار یک آزمایش را استدلال استقرائی گوییم، یا به عبارت دیگر استقرا یعنی از جزء به کل رسیدن.

نتایجی که از این روش به دست می آید کاملا قابل اعتماد نیست بلکه همراه با حدس و گمان است.

مثال) نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر ۴ ضلعی محدب ۳۶۰° است.

استدلال : می دانیم در ۴ ضلعی های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگر اند، پس مجموع ۴ زاویه آنها ۳۶۰° می شود، در نتیجه هر ۴ ضلعی محدب مجموع زاویه هایش ۳۶۰° است.

توجه : استدلال به کار رفته در مثال بالا استدلال استقرائی است، چون از چند حالت خاص یک نتیجه کلی گرفته ایم. (از جزء به کل رسیدن)

ALYAZ

Subject:
Year: Month: Date:

استنتاجی: استدلال بر پایه حقایقی که درستی آنها را قبول کرده ایم. (تعاریف و مفاهیمی که در هم نهشتی هم استفاده می شود) نتایجی که از این استدلال به دست می آید کاملا درست و قابل اعتماد هستند.

قضیه: مفاهیمی کلی هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند و از آنها در حل مسائل دیگر استفاده می شوند.

قضیه شرطی: به قضیه ای که به صورت جمله شرطی بیان می شود قضیه شرطی گوییم. به جمله ای که بعد از اگر قرار می گیرد فرض و به جمله بعد از آنگاه حکم گفته می شود. $p \Rightarrow q$

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم به عبارت شرطی حاصل عکس قضیه گفته می شود که ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه: در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبرو به ساق ها مساوی اند

الف) به صورت شرطی بیان کنید. ب) عکس قضیه را بنویسید.

الف) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های روبروی ساق ها باهم برابرند.

Subject:
Year: Month: Date:

ب) اگر در مثلثی دو زاویه با هم برابر باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین می باشد.

قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد به آن قضیه و عکسش آن قضیه دو شرطی و

به صورت $q \Leftrightarrow p$ نام گذاری می شود.

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

حل: قضیه دو شرطی: یک مثلث قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر توان دوم یک ضلع برابر مجموعه

توان دوم های دو ضلع دیگر باشد.

رفت: اگر مثلث قائم الزاویه باشد آنگاه توان دوم یک ضلع برابر مجموعه توان دوم دو ضلع دیگر.

برگشت: اگر در یک مثلث توان یک ضلع برابر مجموعه توان دوم های دو ضلع دیگر باشد آنگاه

آن مثلث قائم الزاویه است.

توجه: برای اثبات یک قضیه دو شرطی هم رفت قضیه و هم برگشت آن را ثابت کنیم.

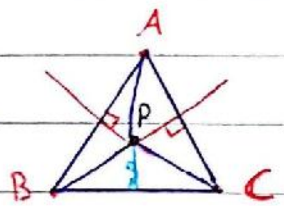
خط های همرس: به چند خط که فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند، و به آن نقطه،

نقطه ی همرسی گفته می شود.

Subject:
Year: Month: Date:

قضیه ۱) در هر مثلث عمودمنصف‌های سه ضلع همرس اند.

فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث است. حکم: عمودمنصف‌ها همرس اند.



استدلال: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون AB و AC متقاطع اند پس عمودمنصف‌های آنها هم در تقاطع می‌باشند و در P هم دیگر را قطع می‌کنند. سپس از P به C، A، B وصل می‌کنیم.

قرار دارد یعنی سه عمودمنصف در نقطه P همرس هستند.

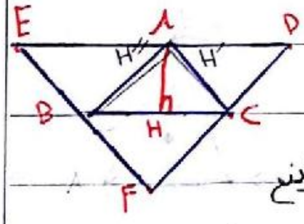
P روی عمودمنصف AB است پس: $PA = PB$ پس P روی عمودمنصف BC

$PB = PC$

P روی عمودمنصف AC است پس: $PA = PC$

قضیه ۲) سه ارتفاع هر مثلث همرس اند. حکم: ارتفاع‌ها همرس اند

فرض: ABC مثلث است



اثبات: از رأس‌های مثلث ABC سه خط موازی اضلاع ABC رسم می‌کنیم

تا مثلث DEF به وجود آید.

$AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$ $\xRightarrow{\text{متوازی الاضلاع}}$ ABCD چهارضلعی $\Rightarrow BC = AD$

$\Rightarrow AD = AE$

$AE \parallel BC$, $AC \parallel BE$ $\xRightarrow{\text{متوازی الاضلاع}}$ AEBC چهارضلعی $\Rightarrow BC = AE$

از طرفی $ED \parallel BC$ است و AH عمود بر BC می‌باشد پس بر ED عمود است در نتیجه AH عمودمنصف

ضلع ED می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد BH' عمودمنصف EF و CH'' عمودمنصف

ALYAZ

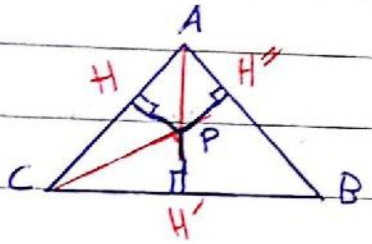
Subject:

Year: Month: Date:

ABC روی عمودمنصف های مثلث DEF می‌باشد چون

DF است یعنی ارتفاع های مثلث

عمودمنصف ها همرس اند پس ارتفاع های ABC نیز همرس اند.



قضیه ۳) در هر مثلث سه نیمساز زاویه های داخلی همرسند.

ABC مثلث است : فرض

سه نیمساز زاویه های داخلی همرسند : حکم

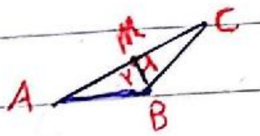
اثبات : نیمساز دو زاویه A و C را رسم می‌کنیم این دو نیمساز در نقطه P همدیگر را قطع می‌کنند.

سپس از نقطه P به سه ضلع عمود می‌کنیم. P روی نیمساز A است : $PH = PH''$ ①

P روی نیمساز C است : $PH = PH'$ ②

$1, 2 \Rightarrow PH' = PH'' \Rightarrow$ P روی نیمساز B قرار دارد $\Leftarrow$ در نتیجه سه نیمساز در نقطه P همرسند.

قضیه ۴) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد آنگاه زاویه روبرو به ضلع بزرگتر بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.



$AC > BC$: فرض

$\hat{B} > \hat{A}$: حکم

اثبات : روی ضلع AC پاره خط CM را طوری جدا کنیم که $CM = CB$ باشد و سپس M را به B وصل می‌کنیم :

$CM = CB \Rightarrow$ متساوی الساقین $\overset{\triangle}{CBM} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$

می‌دانیم در هر مثلث اندازه ی هر زاویه خارجی از هر کدام از زاویه های داخلی غیر مجاور بزرگتر است یعنی :

$\hat{M}_1 > \hat{A} \xrightarrow{(1)} \hat{B}_1 > \hat{A} \} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$

$\hat{B} > \hat{B}_1$ چون B_1 جزئی از $\hat{B}$ است $\}$

ALYAZ

گزاره: به هر جمله‌ی خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد گزاره گوییم. ممکن است ما از درست بودن یا نادرست بودن آن جمله اطلاع نداشته باشیم. مثال گزاره ← $7>3$

توجه: اگر یک گزاره از یک جمله‌ی خبری درست شده باشد به آن گزاره ساده گوییم و اگر ترکیبی از چند گزاره ساده باشد به آن گزاره مرکب گوییم. مثال: ساده ۱۰ عددی زوج است.
مرکب ← ۲ عددی اول و از ۵ بزرگتر است.

نقیض یک گزاره: به عبارتی که ارزش آن دقیقاً متضاد ارزش یک گزاره باشد نقیض آن گزاره گوییم. مثال: ۵ عددی زوج است ← این چنین نیست که ۵ عددی زوج است.

توجه: در صورت نوشتن هر گزاره با استفاده از یک مثال نقض می‌توان نقیض را نوشت.

برهان خلف: در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و نقیض آن درست می‌باشد و سپس از استنتاج به یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیر ممکن می‌رسیم که این نشان دهنده این است که خلاف حکم نادرست است یعنی حکم درست است.

قضیه) اگر در مثلث دو زاویه نابرابر باشد آنگاه ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

حکم: $BC > AC$

Subject:

Year: Month: Date:

اثبات: فرض کنیم که $BC \not> AC$ یعنی $BC = AC$ یا $BC < AC$ است.

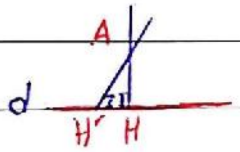
اگر $BC = AC$ باشد $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین است یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و این فرض خلف است.

اگر $BC < AC$ باشد بنا به قضیه ۲، $\hat{A} < \hat{B}$ و این فرض خلف است.

یعنی فرض خلف نادرست است در نتیجه حکم $BC > AC$ درست می باشد.

$AC > BC$ درست

سؤال: از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه غیرواقع بر یک خط نمی توان بیش از یک خط



خط d و نقطه A خارج آن: فرض

بر آن عمود کرد. از A فقط یک عمود بر d می توان کشید: حکم

اثبات: فرض کنیم از نقطه A دو عمود بر d رسم می شود. (فرض خلف)، در این حالت $AH'H$ یک مثلث خواهد بود که مجموع زاویه های داخلی آن از ۱۸۰ درجه بیشتر است و این غیرممکن است ... پس از نقطه A فقط یک خط می توان عمود رسم کرد.

مثال نقض: به مثالی که کلیت درستی حکم را رد می کند.

مثال: درستی یا نادرستی احکام زیر را مشخص کنید، در صورت نادرستی مثال نقض را مشخص کنید. الف) همه ی اعداد صحیح مثبت می باشند. غلط ← $z = -3 \in Z$

ب) برای هر عدد طبیعی n عبارت $2^n + 1$ اول است. غلط ← $n = 3 \quad 2^3 + 1 = 9$

Subject:
Year: Month: Date:

«فصل دوم» ، تالس ـ تشابه دو مثلث ،

نسبت و تناسب: نسبت بین دو عدد A و B یعنی کسر $\frac{A}{B}$ ، $b \neq 0$

تناسب یعنی به دو نسبت مساوی هم یک تناسب گوییم، یعنی اگر دو نسبت $\frac{A}{b}$ و $\frac{c}{d}$

متناسب باشند آنگاه: $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ است.

ویژگی های تناسب: الف) در هر تناسب حاصل ضرب جملات طرفین برابر حاصل

ضرب جملات وسطین است. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftarrow a.d = c.b$

ب) در هر تناسب می توان نسبت ها را معکوس کرد. $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$

ج) در هر تناسب می توان جای طرفین یا وسطین را عوض کرد. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{4}{2}$

د) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ بدست می آید.

هـ) از تناسب های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ و $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

و) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بدست می آید. مثال:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

Subject:
Year: Month: Date:

واسطه هندسی : اگر بین سه عدد a و b و c تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ برقرار باشد

به عدد b واسطه هندسی گوئیم.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow b^2=a.c \Rightarrow b=\sqrt{a.c}$$

مثال : واسطه هندسی بین $4\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ را حساب کنید. $b=?$ $b=\sqrt{a.c}$

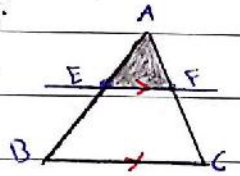
$$b=\sqrt{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{4\sqrt{9}}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$$

فصل دوم :

قضیه تالس : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه نسبت پاره خط های ایجاد شده روی یک ضلع با نسبت پاره خط های ایجاد شده روی ضلع دیگر برابر است.

فرض $EF \parallel BC$

حکم : $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



نتایج تالس : اگر در مثلث ABC ، $EF \parallel BC$ باشد آنگاه داریم :

(۱) نتیجه : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ جزء به کل

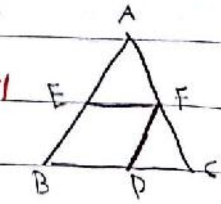
(۲) نتیجه : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$ تعمیم تالس

اثبات نتیجه یک تالس : فرض $EF \parallel BC$ حکم : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

اثبات : $EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{AE+EB}=\frac{AF}{AF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

اثبات نتیجه دو تالس : فرض $EF \parallel BC$ حکم : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

اثبات : FD را موازی AB رسم کنید :



ALYAZ

Subject :

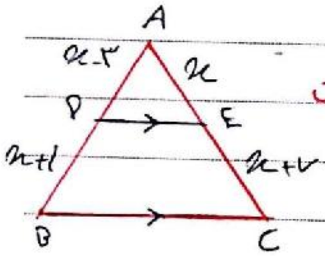
Year. Month. Date. ( )

$EF \parallel BD$, $FD \parallel EB$ $\xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}}$ چهارضلعی $EFDB$ $\Rightarrow EF = BD$ و $FD = EB$

$EF \parallel BD \xrightarrow{\text{تالس ①}} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

$FD \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس ②}} \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$

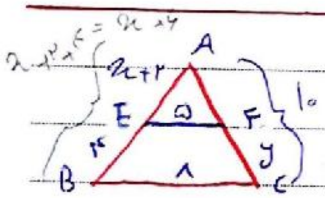


در شکل زیر $DE \parallel BC$ است، x را محاسبه کنید.

اثبات: $DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \rightarrow \dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{x}{x+7} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$

$(x-3)(x+7) = x(x+1) \rightarrow x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + x$

$\rightarrow 7x - 3x = 21 \rightarrow 4x = 21 \rightarrow x = \dfrac{21}{3} = 7$



در شکل زیر $EF = BC$ است، x و y را پیدا کنید.

توجه: اگر روی ضلع های موازی مقدار باشد، معمولاً از نتیجه ② تالس استفاده می‌شود.

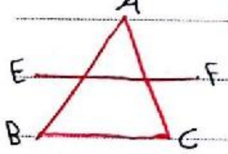
حل) $EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس ②}} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \rightarrow \dfrac{x+2}{x+6} = \dfrac{10-y}{10} = \dfrac{5}{8}$ می‌شود.

$\dfrac{x+2}{x+6} = \dfrac{5}{8} \rightarrow 8(x+2) = 5(x+6) \rightarrow 8x + 16 = 5x + 30 = 8x - 5x = 30 - 16 =$ $\dfrac{14}{3}$

$\dfrac{10-y}{10} = \dfrac{5}{8} \rightarrow 8(10-y) = 50 \rightarrow 80 - 8y = 50 \rightarrow -8y = 50 - 80 \rightarrow -8y = -30$

$y = \dfrac{30}{8} = \dfrac{15}{4}$

عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و نسبت پاره خط های ایجاد شده روی دو ضلع متناسب باشد آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث برابر است.



$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ فرض

$EF \parallel BC$ حکم

اثبات: فرض کنیم EF موازی BC نباشد، از نقطه‌ی E پاره خط EF' را موازی BC رسم کنیم.

$EF' \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF'}{AC}$

$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

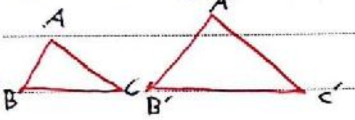
$\Rightarrow \dfrac{AF'}{AC} = \dfrac{AF}{AC} \rightarrow AF' = AF$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

یعنی F و F´ روی هم منطبق هستند و چون EF´ موازی BC است پس EF نیز موازی BC می باشد.

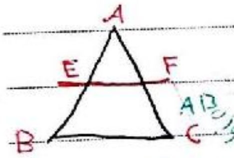
نکته: اگر در مسئله ای بخواهیم ثابت کنیم دو پاره برابرهستند یا پاره خطی با یک ضلع مثلثی موازی است که از عکس قضیه تالس یا عکس قضیه خطوط موازی استفاده می شود.

تشابه مثلث: دو مثلث را متشابه گوییم که اگر زاویه های آنها دو به دو مساوی باشند و ضلع های متناظر متناسب باشند.



$$\hat{ABC} \sim \hat{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} A=A' ,\ B=B' ,\ C=C' \\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=2 \end{cases}$$ ← نسبت تشابه

قضیه اساسی تشابه: اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر آنها را قطع کند، مثلث ایجاد شده با مثلث اصلی متشابه است.



فرض: $EF \parallel BC$ حکم: $AEF \sim \hat{ABC}$

AB مورب $EF \parallel BC \Rightarrow B=E$

AC مورب $EF \parallel BC \Rightarrow C=F$ $\Rightarrow \hat{AEF} \sim \hat{ABC}$

تعمیم تالس: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

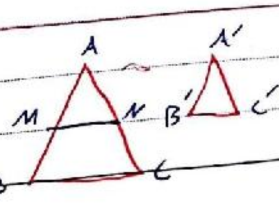
حالات تشابه دو مثلث: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

قضیه اول (تساوی دو زاویه)   فرض: $A=A'$ و $B=B'$ حکم: $\hat{ABC} \sim \hat{A'B'C'}$

اثبات: روی ضلع AB پاره خط AM را مساوی A'B' و روی ضلع AC پاره خط AN را مساوی A'C' جدا می کنیم و سپس از M به N وصل می کنیم. می دانیم $M=B'$ و $N=C'$

$\Rightarrow MN=B'C'$ (ض ز ض) $\Rightarrow \hat{AMN} \cong \hat{A'B'C'}$

$\left.\begin{matrix} B=B' \text{ فرض} \\ M=B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow M=B \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس قضیه}} MN \parallel BC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} AMN \sim ABC \overset{(1)}{\Rightarrow} \hat{A'B'C'} \sim ABC$

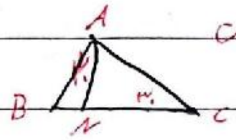


GRAPHIST

Subject:

Year: Month: Date:

در شکل زیر: الف) ثابت کنید دو مثلث متشابه اند. ب) نسبت تشابه آنها چند است



$A_1 = C = ۳۰$

$B = B$ مشترک

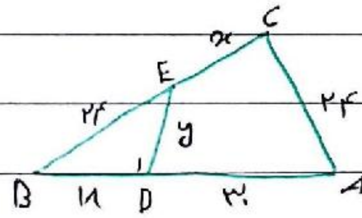
$\Rightarrow A\hat{B}C \sim ABN$ (تساوی دو زاویه) الف)

ب) نسبت تشابه: $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{AB}$ ← ابتدا باید تصمیم بگیریم نسبت کدام را بالا و کدام را پایین ،

و ضلع هایی را صورت و مخرج قرار دهیم که روبروی زاویه مساوی قرار دارند. در نسبت سوم مشترک ها را

خط می زنیم.

در شکل زیر $C = D_1$ است ، مقدار x و y را پیدا کنید.



$B = B$ مشترک

$C = D_1$ فرض

$\Rightarrow A\hat{B}C \sim BDE$ (تساوی دو زاویه)

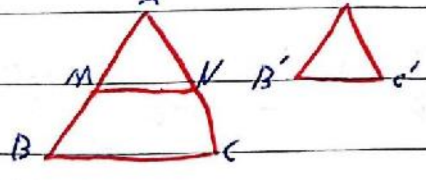
نسبت تشابه = $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{۲۴}{y} = \frac{۴۸}{۲۴} = \frac{۲۴+x}{۱۸}$

$\frac{۲۴}{y} = \frac{\cancel{۴۸}^{۲}}{\cancel{۲۴}_{۱}} = \frac{۲۴}{۲} = y = ۱۲$

$\frac{\cancel{۴۸}^{۲}}{\cancel{۲۴}_{۱}} = \frac{۲۴+x}{۱۸} = ۲۴ + x = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۲$

قضیه دوم تشابه دو مثلث: اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین

آن دو ضلع در دو مثلث مساوی باشند آنگاه دو مثلث متشابه اند (تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین)



فرض: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $A = A'$

حکم: $ABC \sim A'B'C'$

اثبات: روی ضلع AB پاره خط AM را مساوی A'B' و روی ضلع AC پاره خط AN را مساوی A'C' جدا

ALYAZ

Subject:

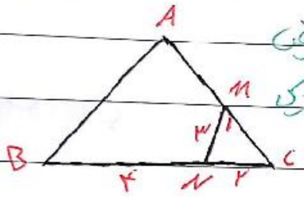
Year: Month: Date:

می‌کنیم و سپس از M به N وصل می‌کنیم. $AMN \cong A'B'C'$ (فرض) $\overset{1}{\Rightarrow} MN = B'C'$ 1

بنابه فرض $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{بنابه عکس}} MN \parallel BC \rightarrow$

بنابه قضیه اساسی تشابه $AMN \sim ABC \xrightarrow{\text{بنابه } 1} ABC \sim A'B'C'$

در شکل زیر $\hat{M}_1 = \hat{B}$ و M وسط AC است. طول اضلاع AC و AB را حساب کنید.



$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض } \hat{M}_1 = \hat{B} \\ \text{مشترک } \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{MNC}$$ (تشابه دو زاویه)

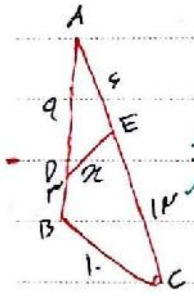
تشابه ← $\dfrac{NC}{AC} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CB} \Rightarrow \dfrac{2}{AC} = \dfrac{3}{AB} = \dfrac{CM}{6}$

$$\xRightarrow{\text{حل}} \frac{2}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{6}{1}} \rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{AC}{12} \rightarrow AC^2 = 24 \rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$

ALYAZ

$\frac{2}{AC}=\frac{3}{AB} \longrightarrow \frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{AB} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{3}{AB} \longrightarrow AB=3\sqrt{6}$

در شکل زیر x را حساب کنید.



الف)

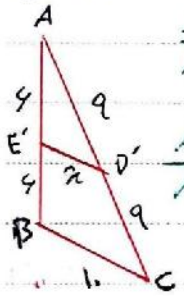
$A=A$ مشترک

$\frac{AD}{AC}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$

$\frac{AE}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$ (تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین)

ب) روی AC ، AD' را و AB ، AE' را هم اندازه AD و AE جدا کنید و نشان دهید $D'E' \parallel BC$ است.



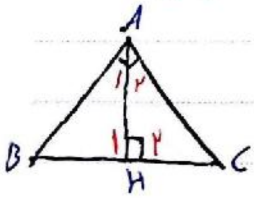
$\frac{AE'}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\frac{AD'}{AC}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$

$\frac{AE'}{AB}=\frac{AD'}{AC} \xRightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} D'E' \parallel BC$

$k=\frac{1}{2} \quad \frac{BC}{2}=5 \leftarrow E'D'$

قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه: اگر مثلث ABC قائم الزاویه‌ای باشد که در رأس A قائمه باشد که AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، روابط زیر را داریم:



(1) $AB^2=BC \cdot BH$ (2) $AC^2=BC \cdot CH$

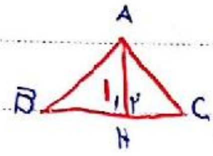
(3) $BC^2=AB^2+AC^2$ ⇐ فیثاغورس (4) $AH^2=BH \cdot HC$

(5) $AB \cdot AC=BC \cdot AH$

Subject:
Date:

اثبات رابطه شماره (۱) ؟

$$\left.\begin{array}{l} B = B \text{ مشترک} \\ 90^\circ \quad H_1 = \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim ABH$$ (تساوی دو زاویه)

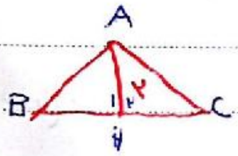


مثلث ۱ با کل شکل

نسبت تشابه → $\cancel{\frac{AC}{AH}} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$

اثبات رابطه‌ی شماره (۲) ؟

$$\left.\begin{array}{l} C = C \text{ مشترک} \\ 90^\circ \quad A = H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \sim ACH$$ (تساوی دو زاویه)



۲ با کل شکل

نسبت تشابه → $\cancel{\frac{AB}{AH}} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot HC$

اثبات رابطه شماره (۳) (فیثاغورس) ؟

$$AB^2 + AC^2 = \underbrace{BC \cdot BH}_{\text{رابطه‌ی ۱}} + \underbrace{BC \cdot HC}_{\text{رابطه ۲}} = BC(BH + HC)$$

$$BC \cdot BC = BC^2$$

اثبات رابطه شماره (۴) ؟

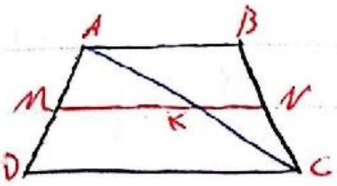
$$\left.\begin{array}{l} ABC \sim ABH \\ ABC \sim ACH \end{array}\right\} \Rightarrow ABH \sim ACH$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + B = 90 \\ C + B = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = C$$

نسبت تشابه → $\cancel{\frac{AB}{AC}} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$

ص ۳۷ فرض: $MN \parallel AB \parallel CD$

حکم: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$



تمرین

اثبات: قطر AC را رسم کنید.

$\overset{\Delta}{ADC}: MK \parallel DC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$

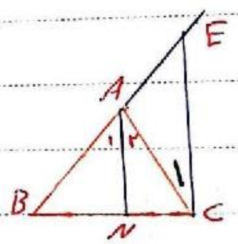
$\overset{\Delta}{ABC}: NK \parallel AB \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$

$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درس ۴ . کاربردهای قضیه تالس و تشابه دو مثلث.

قضیه ۱) در هر مثلث هر نیم‌ساز زاویه داخلی ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $A_1 = A_2$ حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$



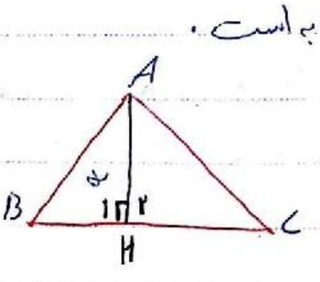
اثبات: ابتدا CE را موازی AN بر امتداد AB رسم می‌کنیم.

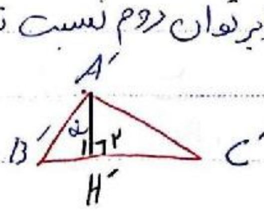
$AN \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{NC}$ (۱)

$NA \parallel CE$ و $A_1 = E$ مورب BE
$AN \parallel CE$ و $A_2 = C_1$ مورب AC
$\xrightarrow[A_1 = A_2]{\text{فرض}} E = C_1 \Rightarrow$ AEC متساوی‌الساقین $\Rightarrow AE = AC$ (۲)

$1, 2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

قضیه دوم) در هر دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر و نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.





فرض: $ABC \sim A'B'C'$ (یعنی ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابر است)

الف) ارتفاع‌ها

حکم: $\frac{AH}{A'H'} = k$

اثبات:

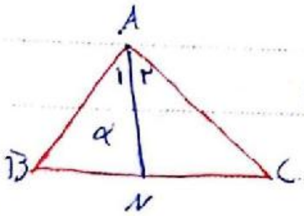
فرض $B=B'$

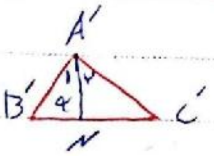
90: $H_1=H'_1$

$\Rightarrow AOH \sim A'B'H' \to \frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=k$

فرض k

نیم‌سازها:





همان فرض قبلی = فرض

حکم: $\frac{AN}{A'N'}=k$

اثبات:

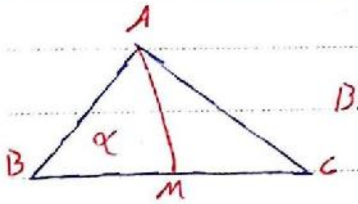
$A_1=A'$ بنا به فرض $B=B'$

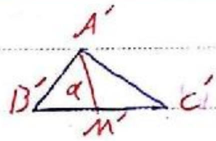
$A_1=A'_1$ به نصف زاویه‌های برابر است

$\Rightarrow ABN \sim A'B'N'$ (تساوی دو زاویه) $\to \frac{AB}{A'B'}=\frac{AN}{A'N'}=\frac{BN}{B'N'}=k$

فرض k

میانه‌ها:





قبلی = فرض

حکم: $\frac{AM}{A'M'}=k$

اثبات:

بنا به فرض $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'} \to \frac{AB}{A'B'}=\frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} \to \frac{AB}{A'B'}=\frac{BM}{B'M'}$

$B=B'$

$\Rightarrow ABM \sim A'B'M'$

تناسب دو ضلع و زاویه بین

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{AM}{A'M'}=\frac{BM}{B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'}=k$

k

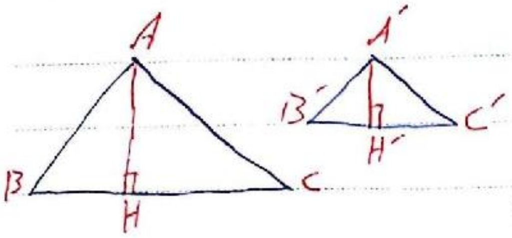
محیط:

بنا به فرض $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=k$

محیط

k

فرض = $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=k$



مساحت: $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K$ حکم (ارتفاع = AH)

اثبات: $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \overset{K}{\frac{BC}{B'C'}} \times \overset{K}{\frac{AH}{A'H'}} = K \times K = K^2$

اگر دو چند ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها K باشد، نسبت محیط‌های آنها K و نسبت مساحت برابر K^2.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$$

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

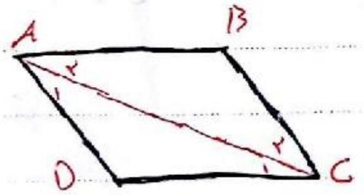
فصل ۳

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن دو برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \to n^2 - 3n = 4n \to n^2 - 3n - 4n = 0 \to n^2 - 7n = 0$$

$n = 0$ غ ق ق

$n(n-7) = 0 \to n = 7$ ✓



قضیه ۱) در هر متوازی الاضلاع زاویه‌های مقابل با هم برابراند: ۳

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $A = C$ و $B = D$

$AC = AC$

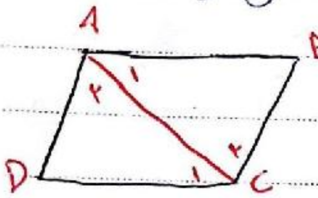
اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم: $ABC \cong ADC$ (ز ض ز) $\Rightarrow B = D$

$AB \parallel DC$ و مورب $AC \to A_2 = C_1$

$AB \parallel DC$ و مورب $AC \to A_1 = C_2$

$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \to A = C$

عکس قضیه ۱) اگر در یک چهارضلعی زاویه های مقابل برابر باشند آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟

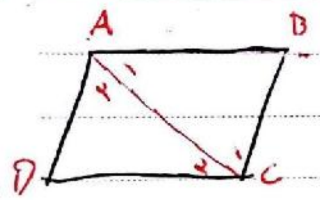


فرض: $B = D$ و $A = C$

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ابتدا قطر AC را رسم می کنیم.

قضیه ۲) در هر متوازی الاضلاع ضلع های رو به رو مساوی اند.



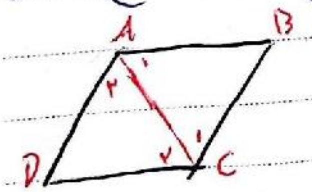
فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات: قطر AC را رسم می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مورب } AB \parallel DC \rightarrow A_1 = C_2 \\ AC \text{ مورب } AD \parallel BC \rightarrow A_2 = C_1 \\ AC = AC \text{ مشترک} \end{array}\right\} ABC \cong ADC \ (\text{ز ض ز}) \Rightarrow AB = DC , AD = BC$$

عکس قضیه ۲) اگر در یک چهارضلعی ضلع های رو به رو برابر باشند آنگاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



فرض: $AB = DC$ و $BC = AD$

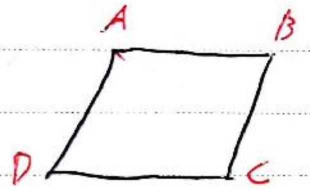
اثبات:

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} (\text{ض ض ض}) \Rightarrow ABC \cong ADC \Rightarrow A_1 = C_2 \xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس خطوط}} AB \parallel DC$$

$$A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$$

Subject:
Date



قضیه ۳) در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

۲

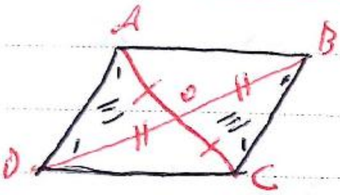
فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $A+B=180$ $D+C=180$ $A+D=180$ $B+C=180$

اثبات: کافیست یکی را اثبات کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C+D=360 \\ A=C \text{ و } B=D \text{ (قضیه ۱)} \end{array}\right\} A+A+B+B=360$$

$$2A+2B=360 \xrightarrow{\div 2} A+B=180$$



قضیه ۴) در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $BO = OD$ و $AO = OC$

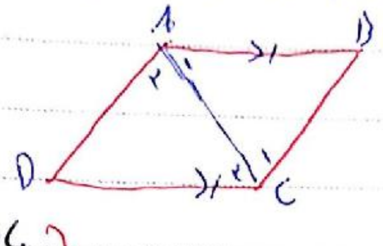
$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مورب و } AD \parallel BC \Rightarrow A_1 = C_1 \\ BD \text{ مورب و } AD \parallel BC \Rightarrow D_1 = B_1 \\ \text{قضیه قبل می‌دانیم} \rightarrow AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AOD \cong OBC \Rightarrow BO = OD,\ AO = OC$$

تمرین (د) چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $AB \underline{\parallel} DC$

$(A_2 = C_1)$

حکم: $AD \parallel BC$



اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم:

فرض $AB = DC$

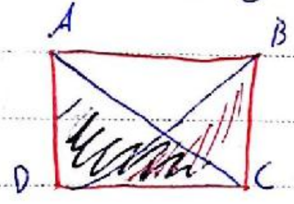
مشترک $AC = AC$

AC مورب $AB \parallel DC$ $A_1 = C_2$

$ABC \cong ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

در و قضیه حکم تساوی ضلع و تساوی زاویه بود را از هم نتیجه گرفتیم.

ویژگی‌های مستطیل و لوزی: ویژگی 1: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.



فرض: $A+B+C+D=90$

حکم: $AC = BD$

$AD = BC$

$DC = DC$

$D = C = 90$

$\hat{ACD} \cong \hat{BCD} \Rightarrow AC = BD$

سوال: اگر دو قطر یک چهارضلعی باهم مساوی باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ چرا؟

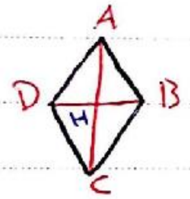
خیر - ذوزنقه متساوی الساقین دو قطر باهم مساوی اند ولی مستطیل نیست.

مربع نوعی مستطیل است پس قطرهای آن هم برابراند.

PAPCO

Subject:
Date

قضیه 2) در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها نیمسازهای زاویه‌های لوزی اند.



فرض: $AB = BC = DC = AD$

حکم: $DH = HB$, $AH = HC$ (منصف) $H_1 = H_2 = 90$ (عمود) و $A_1 = A_2$ (نیمساز)

اثبات: لوزی یک متوازی‌الاضلاع است پس قطرهایش منصف یکدیگرند. (۱)

فرض $AD = AB$

مشترک $AH = AH$

منصف $DH = HB$

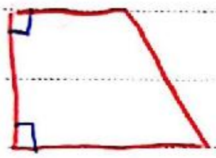
$\left.\begin{matrix} AD = AB \\ AH = AH \\ DH = HB \end{matrix}\right\} ADH \cong AHB$ (ض ض ض) $\Rightarrow H_1 = H_2 = 90$ (۳)

(۲) $A_1 = A_2$

از (۱) و (۲) پس قطرها عمود منصف اند. (۳) قطرها نیمسازند.

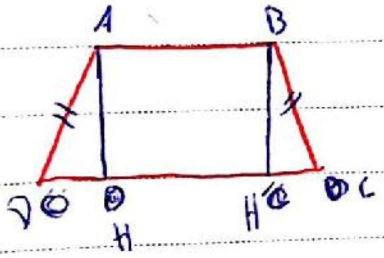
ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند گوییم. به دو ضلع موازی قاعده‌ها و به دو ضلع غیرموازی ساق‌ها گفته می‌شود.

ذوزنقه متساوی‌الساقین: به ذوزنقه‌ای که ساق‌های آن باهم مساوی باشند ذوزنقه متساوی‌الساقین گوییم.



ذوزنقه قائم‌الزاویه: به ذوزنقه‌ای که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد.

ویژگی ۱) در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.



فرض: $AC = BD$ و $AB \parallel DC$

حکم: $A = B$ و $D = C$

اثبات: دو ارتفاع AH و BH' را رسم می‌کنیم.

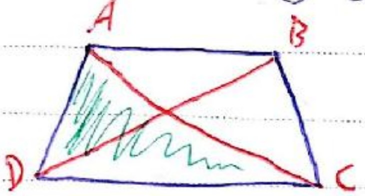
$AD = BC$ (فرض)

$AH = BH'$ چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است

$\Rightarrow ADH \cong BCH'$ (و ض) $\Rightarrow D = C$

هر وقت نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم یک مستطیل به دست می‌آید و
// // // مستطیل // // // مربع // // .

ویژگی ۲) در هر ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطرها با هم برابراند و برعکس.

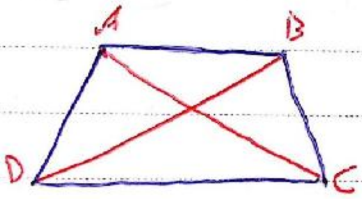


فرض: $AD = BC$ حکم: $AC = BD$

اثبات رفت:

$$\left.\begin{array}{ll} AD = BC & \text{فرض} \\ DC = DC & \text{مشترک} \\ D = C & \text{ویژگی 1} \end{array}\right\} \Rightarrow ADC \cong BCD \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$

برگشت:

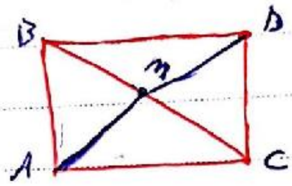


فرض: $AC = BD$

حکم: $AD = BC$

Subject:
Date

ویژگی مهم مثلث قائم الزاویه: در هر مثلث قائم الزاویه اندازه‌ی میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.



فرض: $\hat{A}=90^\circ$

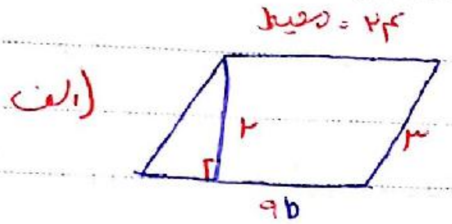
حکم: $AM=\frac{BC}{2}$

اثبات: AM را به اندازه‌ی خودش از نقطه M امتداد می‌دهیم تا نقطه D حاصل شود و سپس D را به B و C وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی $ABDC$ قطرهایش همدیگر را نصف کرده‌اند:

$ABDC$ متوازی الاضلاع $\xrightarrow{\hat{A}=90}$ مستطیل است $ABCD \Rightarrow$ $AD=BC$ ، $AD=2AM$ $\Big\}$ $2AM=BC$ ، $AM=\frac{BC}{2}$

مثال ۵: مساحت شکل‌های زیر را حساب کنید.　　　　　توضیح این درس در بخش ذیل

الف)

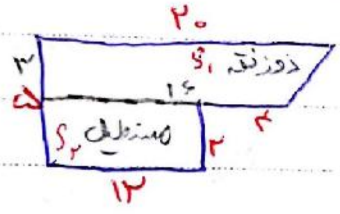


$P = 2(3) + 2b$

$24 = 6 + 2b \to$

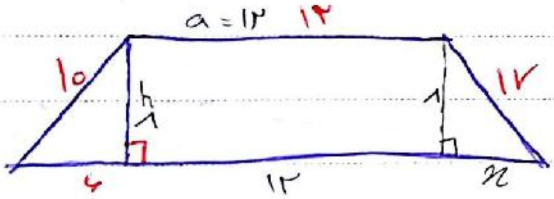
$\frac{18}{2} = 9$

$S = b \times h = 2 \times 9 = 18$



$S_1 = \frac{(20+16)3}{2} = 54$

$S = 2 \times 12 = 24 \to S = S_1 + S_2 = 54 + 24 = 78$

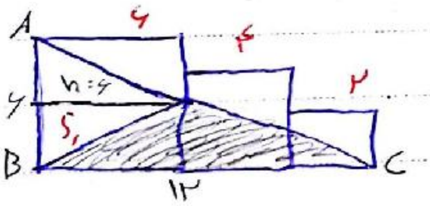


$10^2 = 6^2 + h^2 \to h^2 = 100 - 36 = 64 \to h = 8$

$17^2 = x^2 + 8^2 \to 289 = x^2 + 64 \to x^2 = 225$

$x = 15$　　$S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(12+33)8}{2} = 180$

مساحت قسمت هاشور خورده را حساب کنید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند)

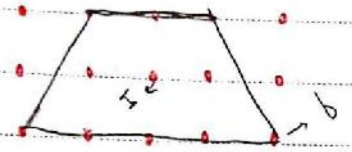


$S_{ABC} = \frac{12 \times 6}{2} = 36$

S هاشور خورده $\to S_{ABC} - S_1 = 36 - 18$

$S_1 = \frac{6 \times 6}{2} = 18$　　　$= 18$

نقاط شبکه‌ای: به نقاطی که روی خط‌های افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی یک واحد می‌باشد را نقاط شبکه‌ای گوییم.



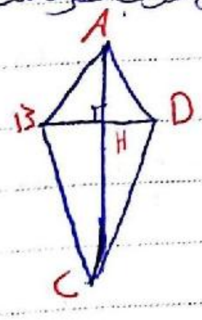
چند ضلعی شبکه‌ای: به چند ضلعی که تمام رأس‌های آن روی نقاط شبکه‌ای قرار داشته باشند. در هر چند ضلعی شبکه‌ای به نقاطی از شبکه که روی اضلاع چند ضلعی قرار دارد، نقاط مرزی گفته می‌شود و با b نام‌گذاری می‌شود و نقاطی از شبکه که درون چندضلعی قرار می‌گیرد نقاط درونی گفته می‌شود و با I نام‌گذاری می‌شود.

مثلاً در چهارضلعی شبکه‌ای ABCD داریم: $I = ۳$, $b = ۸$

فرمول پیک در محاسبه مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای: اگر b نقاط مرزی یک چند ضلعی باشند و I نقاط درونی آن باشد، مساحت چند ضلعی از راه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} - 1 + I$$

نکته: در هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند مساحت برابر نصف حاصل ضرب قطرهاست.



فرض: $AC \perp BD$

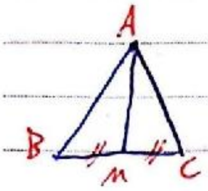
حکم: $\frac{AC \times BD}{2} = S$ (۱)

$$S_{کل} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{BD \times AH}{2} + \frac{BD \times CH}{2} = \frac{BD}{2}(AH + CH) \quad (۱)$$

کاربردها (مساحت):

سؤال (۹): نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

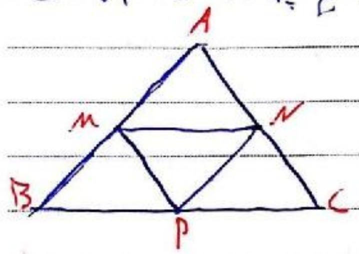


فرض: AM میانه $(BM=MC)$

حکم: ثابت کنید $S_{ABM}=S_{ACM}$ ①

اثبات: ① $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{1}{1}$ در نتیجه $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow[BM=MC]{\text{فرض}}\frac{BM}{BM}=1$

سوال: نشان دهید اگر وسط های هر سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم ۴ چهار مثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های مساوی ایجاد می شود.



فرض: M, N, P وسط اضلاع

①

حکم: مثلث های زیر دو به دو برابرند: $\hat{A}MN \simeq M\hat{N}P \simeq N\hat{P}C \simeq M\hat{B}P$

②
$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

③ و به همین ترتیب می توان ثابت کرد

۴
$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \\ NP \parallel AB \end{array}\right\}$ چهار ضلعی $MNBP$ متوازی الاضلاع است. $\rightarrow M\hat{N}P \simeq M\hat{B}P$

و به همین ترتیب می توان ثابت کرد که چهار مثلث با هم هم نهشتند.

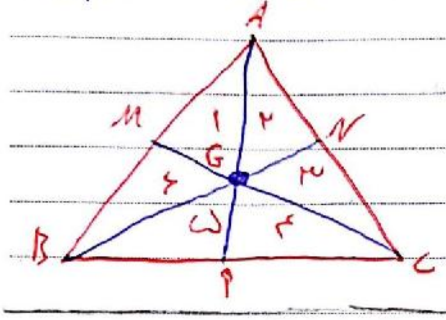
و داریم که اگر دو مثلث هم نهشت باشند مساحت های آنها برابر است

$S_{AMN}=S_{NPC}=S_{MNP}=S_{MBP}$

GRAPHIST

Subject :
Year. Month. Date. ( )

سؤال ۳- نشان دهید سه میانه هر مثلث آن را به شش مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می‌کند.



حکم: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ ☆

اثبات:

$\overset{\triangle}{AGC}$ ۱: میانه $GN \Rightarrow S_2 = S_3$ (۲)

BGC: میانه $GP \Rightarrow S_5 = S_4$ (۳)

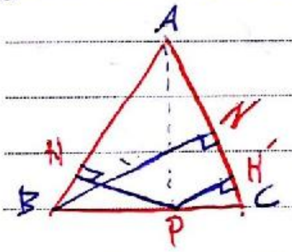
AGB ۲: میانه $GM \Rightarrow S_1 = S_6$ (۱)

۳: $\underbrace{S_1 + S_6}_{} + \cancel{S_5} = S_2 + S_3 + \cancel{S_4}$

$2S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ (۴)

$\underline{(۱)(۲)(۳)(۴)} \Rightarrow$ ☆

سؤال ۴) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین مجموع فاصله‌ی هر نقطه روی قاعده از ساق‌های برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.



فرض: $AB = AC$

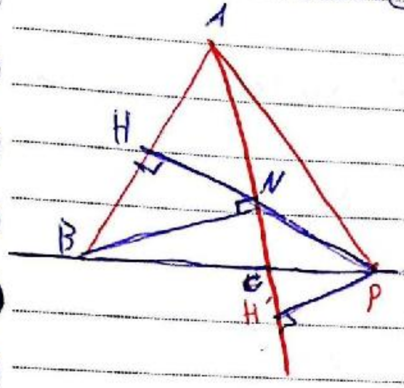
حکم: $PH + PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می‌کنیم.

$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{\overline{AB}} \times PH}{2} + \frac{AC \times PH'}{2} \xrightarrow{AB = AC\ \text{فرض}} \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}}$

$\frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH + PH') \rightarrow PH + PH' = BN$

سوال ۵) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین قدر مطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتدادهای هر قاعده از دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.



فرض: $AB = AC$

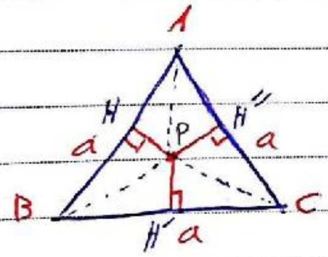
حکم: $PH - PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABP} - S_{ACP} \rightarrow \frac{AC\times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{AB}\times PH}{2} - \frac{AC\times PH'}{2}$$

$$AC = AB \rightarrow \frac{\cancel{AC}\times BN}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH - PH') \rightarrow PH - PH' = BN$$

سوال ۶) ثابت کنید مجموع فاصله‌ی هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.



فرض: $AB = AC = BC = a$

حکم: $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

اثبات: از P به A و B و C وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{APC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a\times PH}{2} + \frac{a\times PH'}{2} + \frac{a\times PH''}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a}{2}(PH + PH' + PH'') \rightarrow PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

مثال: اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌ی نقطه‌ی M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند اندازه‌ی ضلع مثلث و مساحت مثلث است.

$PH = 2$ و $PH' = 4$ و $PH'' = 6$

$a = ?$ و $S = ?$

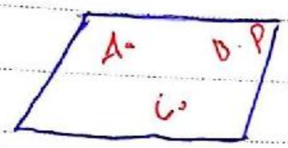
$$PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a \rightarrow 2 + 4 + 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow 12 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\rightarrow \sqrt{3} a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a = 8\sqrt{3}$$ ضلع مثلث

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} (8\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (64(3)) = 48\sqrt{3}$$

فصل ۴ : تجسم فضایی (هندسه فضایی)

خط و صفحه :



نمایش خط ← ۲ نقطه نیازمند   نمایش صفحه ۳ نقطه نیازمند

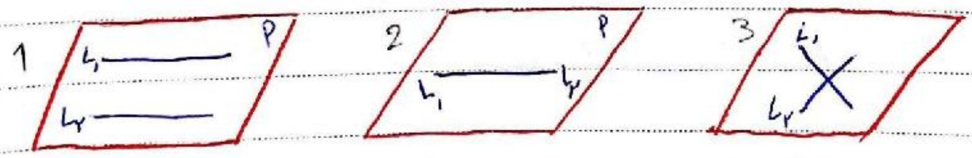
نکته : از یک خط بیشمار صفحه تولید می‌شود . روی هر خط بینهایت نقطه و روی هر صفحه بینهایت خط وجود دارد . وضعیت دو خط در فضا :

1. موازی : به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند ، دو خط موازی گوییم .

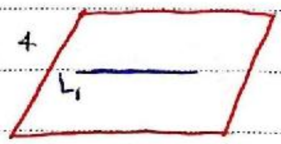
2. منطبق : به دو خط که در یک صفحه باشند و در بیشمار نقطه مشترک هستند را دو خط منطبق گویند .

3. متقاطع : به دو خط که در یک صفحه و در یک نقطه با هم مشترک اند را دو خط متقاطع گویند .

4. متنافر : به دو خط که در یک صفحه قرار نداشته باشند دو خط متنافر گوییم .



$L_1 \parallel L_2$ $L_1 = L_2$ $L_1 \nparallel L_2$



L_2 = روی دیوار جلویی است

P = اسم صفحه

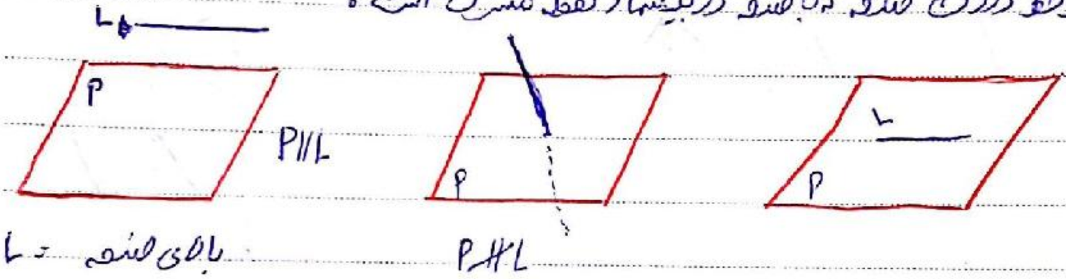
Subject:
Date

وضعیت خط و صفحه در فضا:

1. موازی: به خطی که با صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشد.

2. متقاطع: به خط و صفحه ای که در یک نقطه مشترک اند. خط و صفحه متقاطع می گویند.

3. منطبق: به هر خط درون صفحه که با صفحه در بیشمار نقطه مشترک است.



وضعیت دو صفحه در فضا:

موازی: به دو صفحه که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، دو صفحه موازی می گوییم.

2. متقاطع: به دو صفحه که در یک خط با هم مشترک اند. و به آن خط، فصل مشترک دو صفحه گفته می شود.

3. منطبق: به دو صفحه که در بیشمار نقطه مشترک اند.