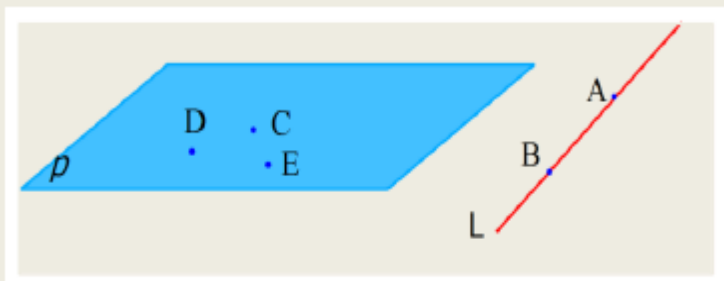




نقطه خط و صفحه از مفاهیم مهم هندسی هستند که معمولاً به صورت زیر نمایش داده می شوند.



خط AB یا BA و یا خط L

صفحه DCE یا CDE یا ... و یا صفحه P

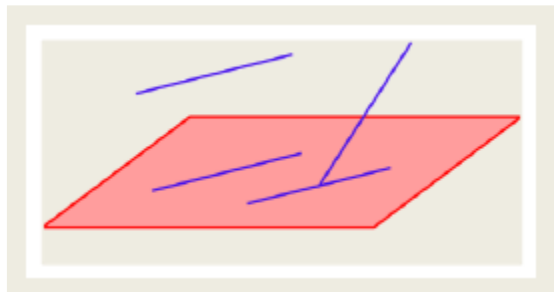
توجه: خط صفحه نامحدودند و ضخامتی هم ندارند.

اوضاع نسبی دو خط در صفحه

۱. موازی منطبق: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو خط در یک نقطه مشترکند. این نقطه را نقطه ی تقاطع دو خط می نامند.

حالت های مختلف دو خط در فضا:

۱. موازی منطبق: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.
۳. متقاطع: دو خط در یک نقطه مشترکند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.
۴. متنافر: دو خط هیچ نقطه ی مشترکی ندارند و نمی توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.



فعالیت: در شکل بالا خطوط را نام گذاری کنید و برای هر حالت دو خط در فضا مثالی از این خطوط بزنید.

توجه:

در این فصل دانستن اصول زیر ضروری می باشد.

- اصل ۱: از هر دو نقطه ی متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می گذرد. یعنی اولاً یک خط در فضا وجود دارد که از دو نقطه ی متمایز در فضا می گذرد؛ ثانیاً این خط یکتاست، یعنی اگر دو خط از دو نقطه ی مشخص در فضا بگذرند حتماً بر هم منطبقند.
- اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می گذرد.
- اصل ۳: در هر صفحه حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.
- اصل ۴: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.
- اصل ۵: اگر دو نقطه ی متمایز از خطی در یک صفحه باشد، آن خط به تمامی درون صفحه قرار می گیرد.
- خط و صفحه از هر طرف نامحدود می باشند؛ بنابراین نمی توان تمام آن ها را در یک شکل نمایش داد.
- اصل ۶: اگر دو صفحه ی متمایز در یک نقطه مشترک باشند، آنگاه در یک خط مشترک خواهند بود.
- اصل ۷: اصل توازی اقلیدس در صفحه: از هر نقطه خارج یک خط در صفحه یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.
- اصل ۷ (اصل توازی اقلیدس در فضا): از هر نقطه خارج یک خط در فضا یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.

سوال:

در صفحه از هر نقطه چند خط می گذرد؟ در فضا چطور؟

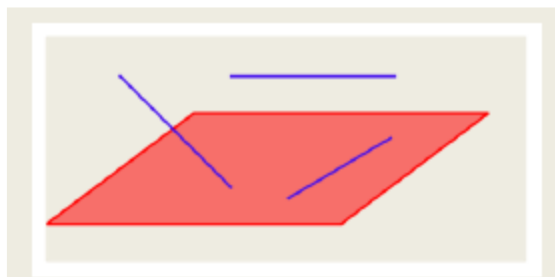
در صفحه از یک نقطه خارج خط چند خط موازی آن می توان رسم کرد؟ در فضا چطور؟

آیا در فضا هم دو خط موازی با یک خط خود با هم موازی هستند؟

آیا در فضا هم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند؟

حالت های مختلف خط و صفحه در فضا:

۱. موازی منطبق: در این حالت خط کاملاً درون صفحه قرار می گیرد.
۲. موازی غیرمنطبق: در این حالت خط و صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: در این حالت خط و صفحه در یک نقطه با هم اشتراک دارند؛ این نقطه را نقطه ی تقاطع خط و صفحه می نامند.



سوال:

از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد ؟

از دو خط متقاطع در فضا چند صفحه می گذرد ؟ از دو خط موازی چطور ؟

از یک نقطه خارج صفحه چند خط موازی آن صفحه می توان رسم کرد ؟

دو خط L و d در فضا با هم موازیند .

اگر صفحه ای موازی یک از آنها باشد آیا الزاماً با دیگری موازی است ؟

اگر صفحه شامل یکی از آنها باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

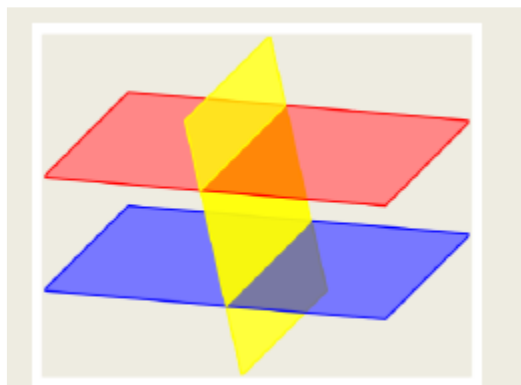
اگر صفحه با یکی از آنها متقاطع باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

حالات نسبی دو صفحه

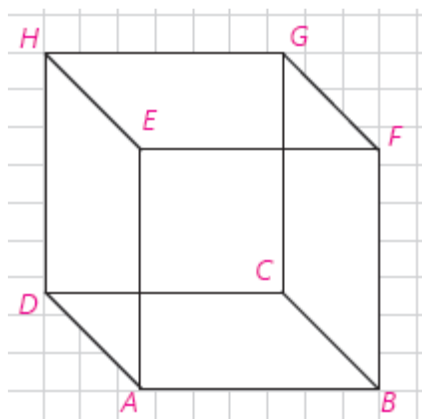
۱. موازی منطبق: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.

حالت های مختلف دو صفحه در فضا :

۱. موازی منطبق: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.



سوال:



به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چگونه؟

EF و GC چگونه؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متناظر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

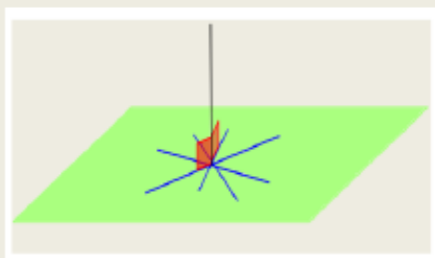
بر کدام منطبق است؟

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.

تعامد خط و صفحه:

اگر خطی در یک نقطه صفحه را قطع کند بر آن صفحه عمود است، هرگاه بر تمام خطوط آن صفحه که از این

نقطه می گذرند عمود باشد.

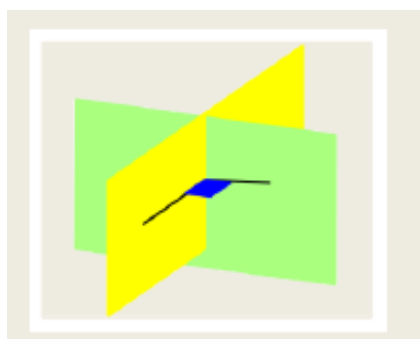


می توان نشان داد اگر این خط فقط بر دو خط متقاطع از صفحه

عمود باشد، بر صفحه عمود است.

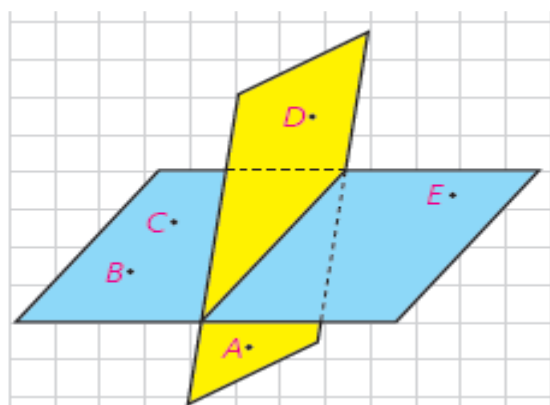
تعامد دو صفحه:

دو صفحه بر هم عمودند هرگاه هر یک شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

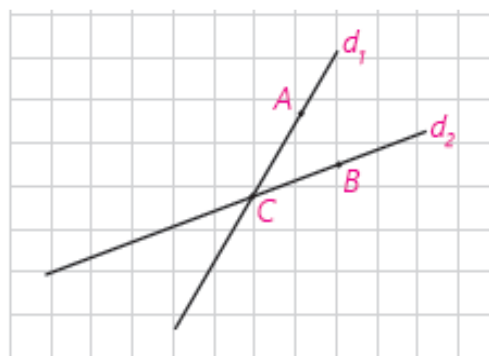


سوال

- می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.
- (الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟
- (ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟
- (ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟
- (د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟
- (هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.



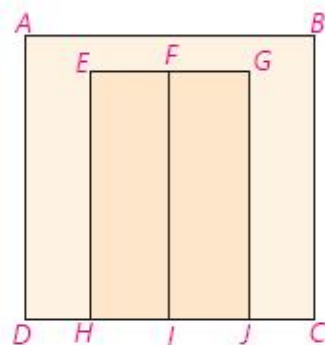
- ۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :
- (الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.
- (ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.
- (ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
- (د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



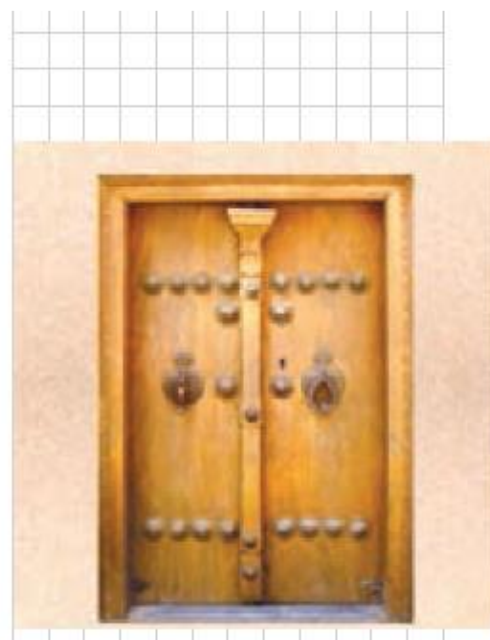
- ۲- خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل اند. صفحه P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.
- (الف) صفحه P شامل نقطه C است.
- (ب) صفحه P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.
- (ج) صفحه P شامل نقاط C و B و A است.
- (د) صفحه P شامل خط d_1 و نقطه B است.

- ۳- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).
- (الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.
- (ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.

- ۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.
- (الف) وضعیت صفحات EFGH و ABCD و EFGH را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.



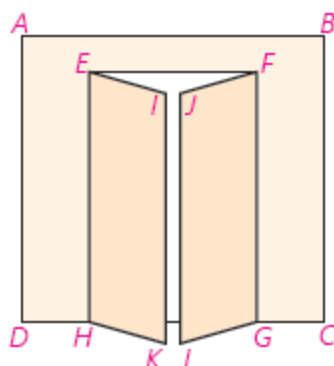
- (ب) خطوط BC و FI
- (ج) خطوط AB و FI
- (د) خطوط EF و FG
- (ه) خطوط HI و FG
- (و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)





۵- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های

زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های ABCD و EIKH و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ت) خطوط BC و FJ

۷- منشور سه‌بhelوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید.

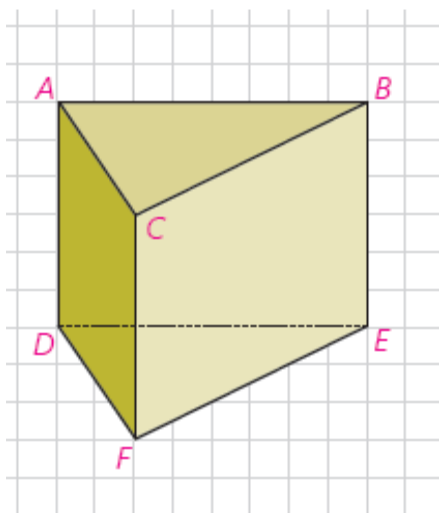
ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط هم‌رس نام ببرید.

ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید.



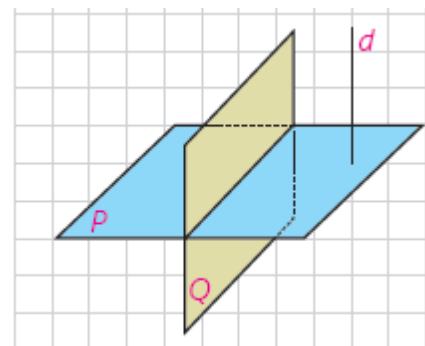
۸- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می توان به آن صفحه عمود کرد؟

۹- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

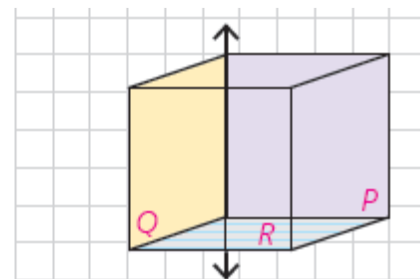
الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

۱۰- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟



۱۱- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟



درس دوم

تفکر تجسمی

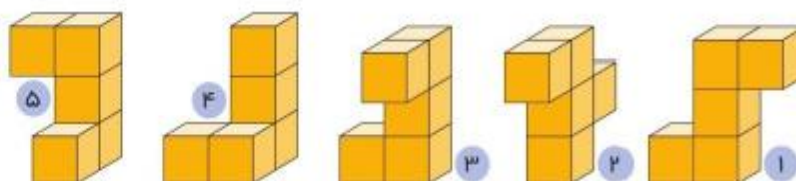
در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند درباره موضوع مورد نظر فکر کنیم.

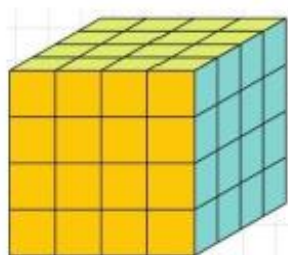
در این درس هدف تجسم اجسام و اشکال است. به همین دلیل ما فقط سعی داریم با مثال‌های متعدد در این زمینه به تبحر کافی برسیم.

(۱) شکل زیر کدام شکل هندسی است که از بالا به آن نگاه شده؟



(۲) کدام گزینه شکل سمت چپ را کامل می‌کند؟





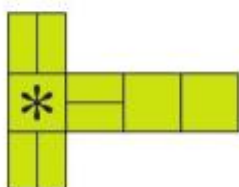
۳) در مکعب مقابل که تمام وجه های آن رنگ شده است .

الف) چند مکعب رنگ شده داریم ؟

ب) چند مکعب فقط دو وجه رنگ شده دارد ؟

ج) چند مکعب فقط ۳ وجه رنگ شده دارد ؟

۴) در هر مورد مکعب گسترده سمت چپ مربوط به کدام گزینه است ؟



۳)



۲)



۱)



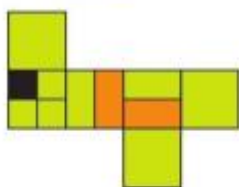
۳)



۲)



۱)



۳)

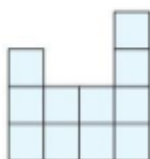
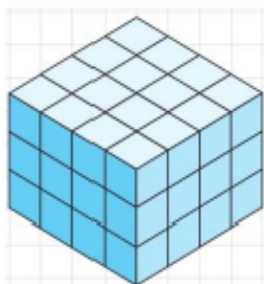


۲)



۱)

۵) در شکل مقابل حداقل و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به صورت زیر شود .

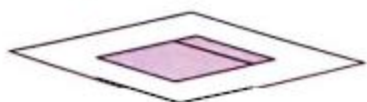


سوال : چه چیزی باعث این خطای دید شده است ؟

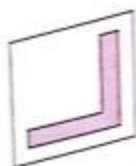


نتیجه : با توجه به نمای دید ما اجسام دارای شکل های مختلفی خواهند بود .

نمای بالا



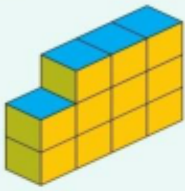
نمای چپ



نمای روبرو

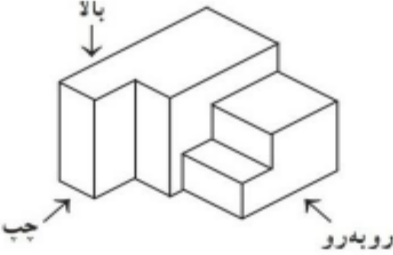
یادداشت

۶) نماهای هر شکل را در مقابل آن درون جدول رسم کنید.

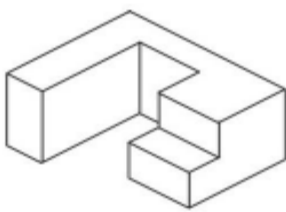
نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ
		
		
		

۷) سه نمای روبه‌رو و راست و چپ اجسام زیر رسم شده اند. مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام تما است.

(الف)



(ب)



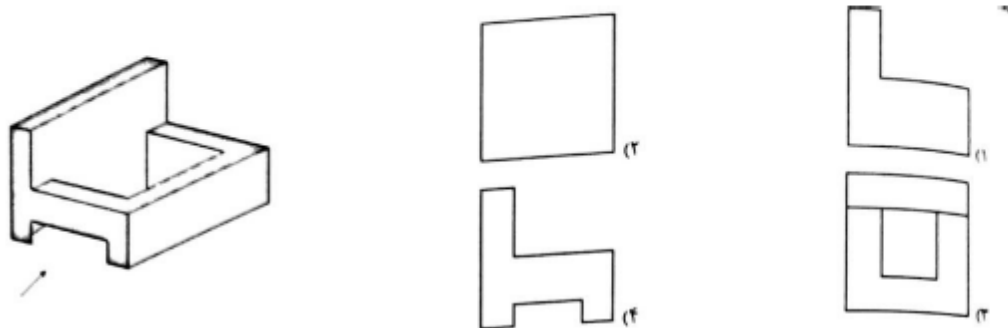
(ج)



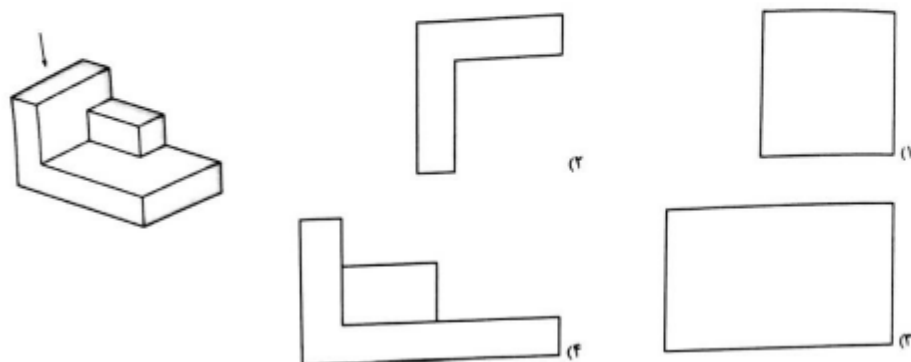
Four sets of 2D orthographic projections are shown, each corresponding to one of the 3D shapes above. Each set includes a front view, a top view, and a left side view, with some views having dashed lines to indicate hidden edges.

تمرین :

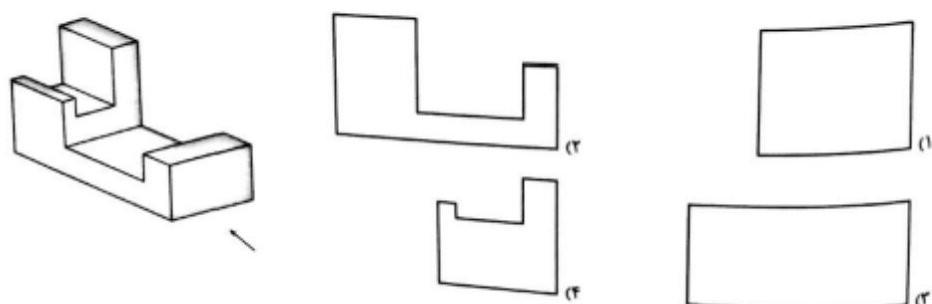
(۱) نمای چپ شکل مقابل کدام است ؟



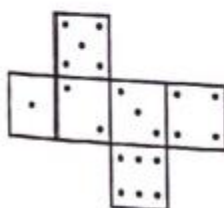
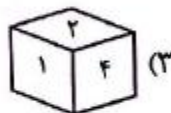
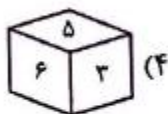
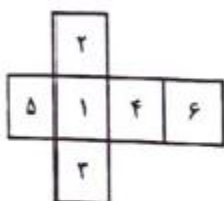
(۲) نمای بالای شکل مقابل کدام است ؟



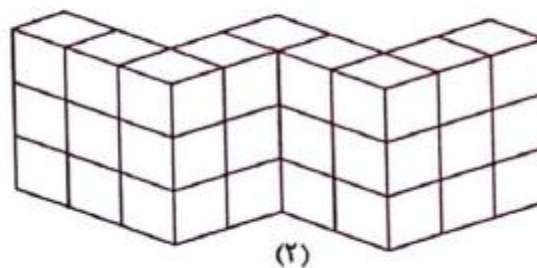
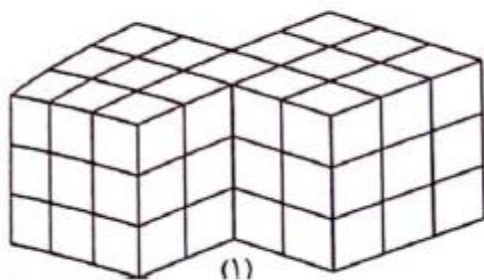
(۳) نمای روبروی شکل مقابل کدام است ؟



۴) کدام مکعب مربوط به گسترده مقابل است؟



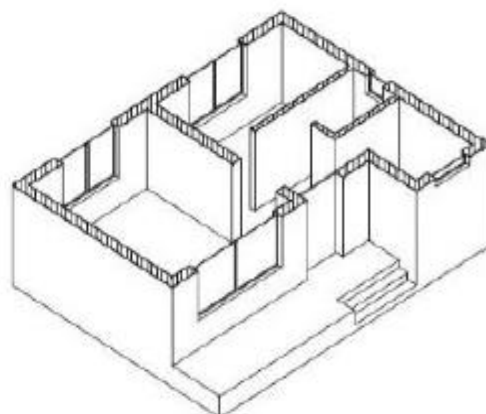
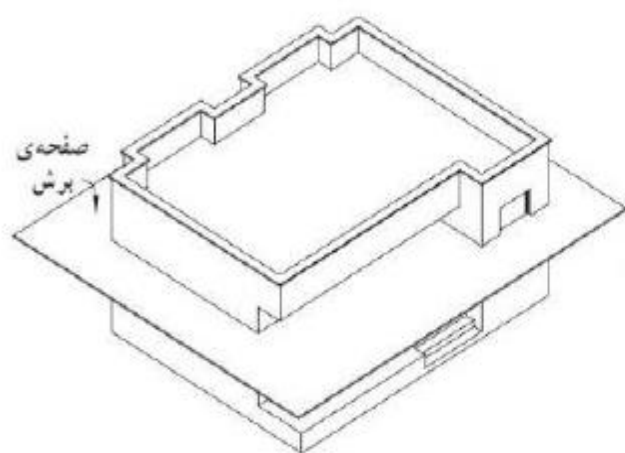
۵) چند مکعب کوچک از شکل (۱) برداشته شود تا شکل (۲) بدست بیاید؟



درس سوم : برش

برش یک علم بسیار کاربردی در علوم مکانیک ، معماری ، پزشکی ، زمین شناسی و است .

به کمک برش های مختلف می توان درک درست تری از اجسام به دست آورد به عنوان مثال به شکل های زیر که مربوط به علوم مختلف هستند نگاه کنید .



سطح مقطع : شکلی که از برخورد یک صفحه با یک شکل هندسی حاصل می شود را سطح مقطع می نامند.

سوال : اگر صفحه ای به صورت افقی ، عمودی یا مایل بر یک کنده برش ایجاد کند . سطح مقطع های ایجاد شده چه شکل هایی خواهند بود ؟



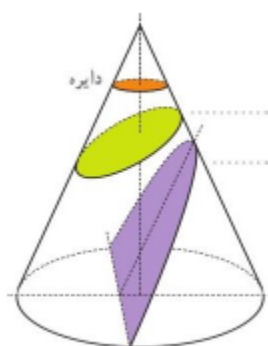
.....



بیضی



.....



سوال : یک صفحه به صورت های زیر با یک مخروط برخورد می کند . سطح مقطع حاصل چه شکلی است ؟

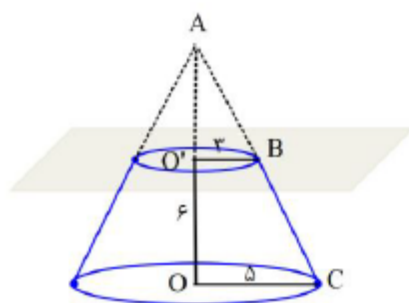
الف) افقی : سطح مقطع است .

ب) مایل به طوری که قاعده را قطع نکند : سطح مقطع است .

ج) مایل به طوری که موازی یال باشد : سطح مقطع است .

سوال : اگر صفحه ای عمودی این دو استوانه را قطع کند چه سطح مقطعی حاصل می شود ؟

سوال : صفحه ای افقی یک مخروط را قطع و یک مخروط ناقص درست کرده است . حجم این مخروط ناقص را بیابید .



سوال : صفحه ای به فاصله h از مرکز کره آن را قطع کرده است . مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

سوال : دو دایره با هم برخورد کرده اند . اگر تمام نقاط مشترک آنها را به مرکز یکی از آنها وصل کنیم چه شکلی حاصل می شود ؟

A diagram showing a sphere resting on a gray rectangular plane. A blue elliptical shape is tangent to the top of the sphere, representing a horizontal plane at the pole. Dashed lines show the center of the sphere and its projection onto the gray plane.

۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

دوران حول محور

از دوران دادن شکل‌های هندسی دو بعدی می‌توان جسم‌های سه بعدی مختلفی را تجسم کرد.
مثلاً از دوران پاره خط عمود بر یک خط حول آن یک دایره بدست می‌آید.

مثلاً از دوران نیم دایره حول قطر خوش، کره بوجود می‌آید.

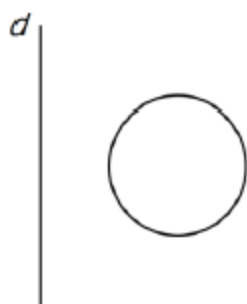
سوال: از دوران یک مستطیل ۲ در ۴ حول طول و عرض آن چه شکل‌هایی ایجاد می‌شود؟

سوال: اگر دو خط متقاطع باشند و یکی حول دیگری دوران کند چه شکلی حاصل می‌شود؟

سوال: از دوران مثلث متساوی الساقین حول قاعده چه شکلی پدید می آید؟

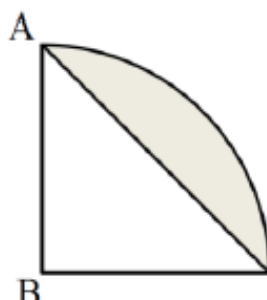
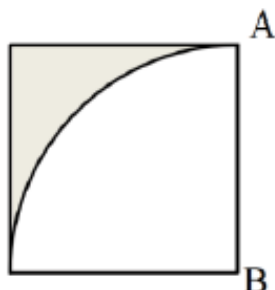
سوال: از دوران ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها چه شکلی پدید می آید؟

سوال: از دوران دایره حول خط d چه شکلی حاصل می شود؟

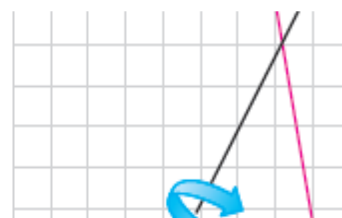


سوال: حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائمه ۳ و ۴ حول ضلع قائمه کوچکتر را بیابید.

سوال : حجم حاصل از دوران قسمت رنگی هر شکل حول AB چقدر است ؟



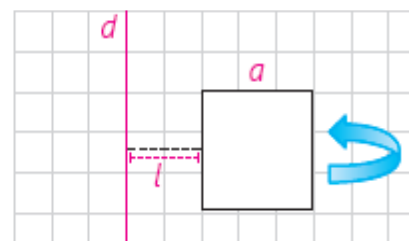
۱- دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟



۲- در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

- الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن :
- ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه :
- پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها :
- ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن :

۳- مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



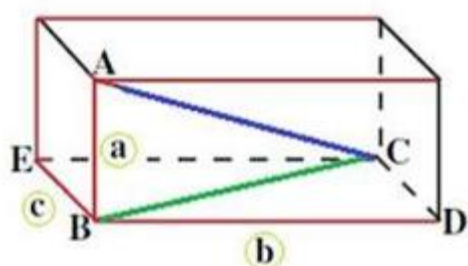
۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.



مطالب اضافی:

فرمولهای مهم فصل چهارم:

روش یافتن طول قطر مکعب مستطیل:



فرض کنید طول یال های AB ، BD و BE به ترتیب a ، b و c باشد. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم الزاویه و AC وتر آن است.

وتر آن است. از طرف دیگر، مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است.

$$\text{طول وتر } ABC = \text{طول قطر } AC$$

با دو بار استفاده از رابطه ی فیثاغورس می توانیم بنویسیم:

و



$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

تعریف مکعب: مکعب مستطیلی که طول یال های آن با هم برابر باشند.

توجه: اگر طول یال های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن برابر است با: $a\sqrt{3}$

حجم مکعب مستطیل:

با داشتن طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل، می توان نوشت:

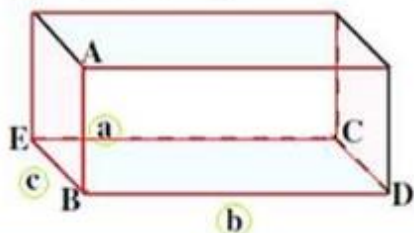
$$\text{حجم مکعب مستطیل} =$$

مساحت کل مکعب مستطیل:

مجموع مساحت های همه ی وجه های مکعب مستطیل را مساحت کل آن می گویند.

با توجه به اینکه در مکعب مستطیل، وجه های روبه رو همنهشت هستند، پس اگر طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب a ، b و c باشند، می توان مساحت کل آن را بصورت

زیر نوشت:



مساحت کل



توجه: در رابطه ی بالا، اگر به جای b و c مقدار a را قرار دهیم، مساحت کل مکعب به طول یال a بدست می آید.

$$S = 2(aa + aa + aa) = 2(3a^2) = 6a^2$$

اندازه حجم مکعب: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، در نتیجه با استفاده از رابطه ی حجم مکعب مستطیل حجم مکعبی به طول یال a برابر است با:

حجم مکعب

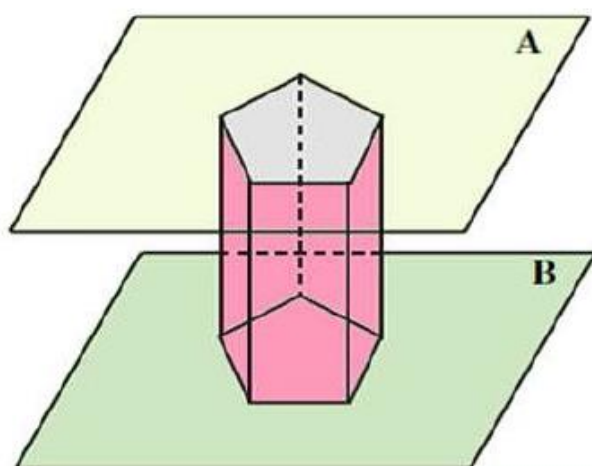
مساله: طول قطر یک مکعب برابر است با $\sqrt{75}$ ، حجم و مساحت کل این مکعب را بدست آورید.

= قطر مکعب

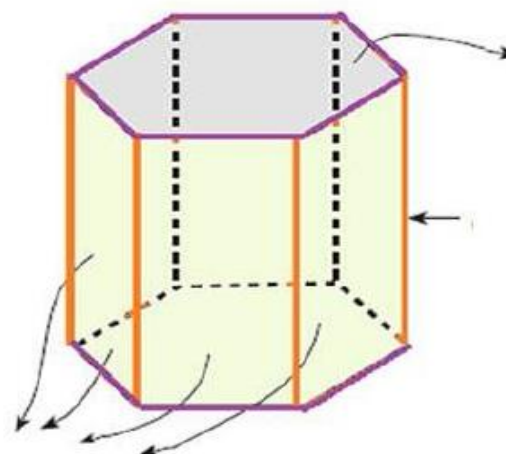
: حجم مکعب

: مساحت کل

تمرین: اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{12}$ باشد مساحت کل و حجم آنرا حساب کنید.



منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی الاضلاع باشند.



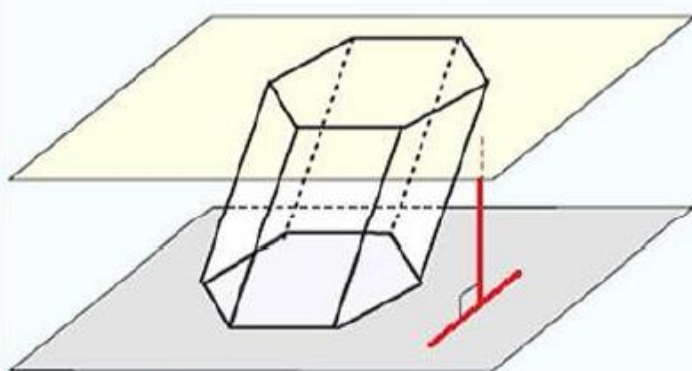
دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی الاضلاع هستند، و یال‌های محل تلاقی وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند

ارتفاع منشور

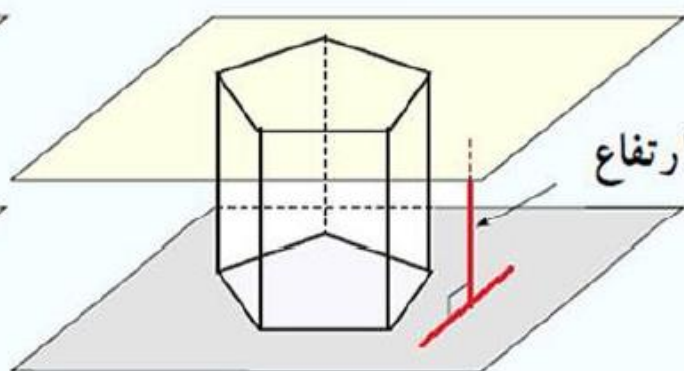
پاره خطی که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است

نکته: همه ی یال‌های جانبی منشور با هم موازیند. (می‌توانید دلیل اش را بیان کنید)

اگر این یال‌ها بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک
اینصورت آن را می‌نامند



منشور مایل



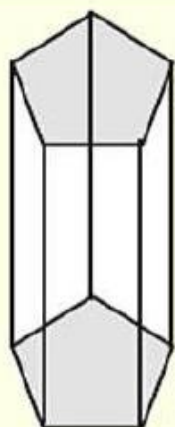
منشور قائم

ارتفاع

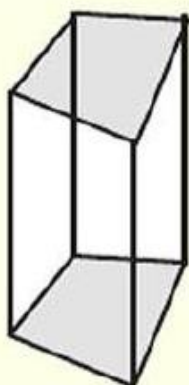
نکته: می‌دانیم که همه وجه‌های جانبی یک منشور متوازی الاضلاع هستند.
حال اگر منشور قائم باشد، این متوازی الاضلاع‌ها مستطیل خواهند شد.

نامگذاری منشورها:

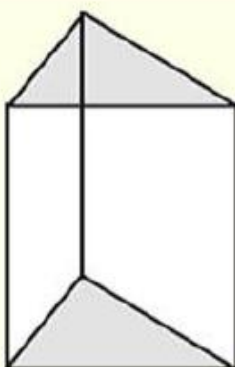
یک منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. به این صورت که اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را قاعده‌ی یک منشور می‌نامند و اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را قاعده‌ی یک منشور می‌نامند.



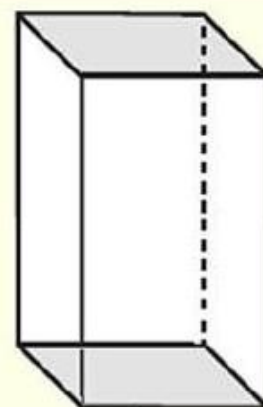
منشور پنج ضلعی



منشور چهار ضلعی



منشور مثلثی



منشور چهار ضلعی

مساحت جانبی و مساحت کل یک منشور:

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی و مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌ها را مساحت کل آن می‌نامند.

نکته: در یک منشور:

$$\text{مساحت کل} =$$

نکته: اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a ، b و c باشند، آنگاه:

مساحت جانبی: $S_h = p \times h = 2(a + b) \times c = 2(ac + bc)$

→

مساحت کل: $S = 2S_{\text{قاعدہ}} + S_h = 2(a \times b) + 2(a + b) \times c$

$= 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

→