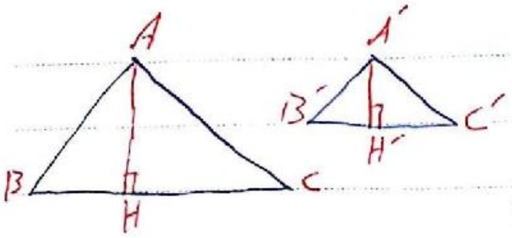
Subject :
Date



مساحت: حکم $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K$ (ارتفاع = AH)

اثبات: $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC\times AH}{\frac{1}{2}B'C'\times A'H'} = \underbrace{\frac{BC}{B'C'}}_{K}\times\underbrace{\frac{AH}{A'H'}}_{K} = K\times K = K^2$

اگر دو چند ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد، نسبت محیط های آنها k و نسبت مساحت برابر k^2.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$$

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

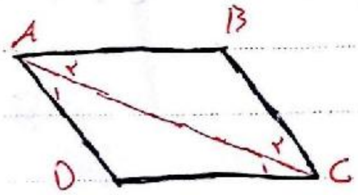
فصل ۳

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن دو برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \to n^2-3n=4n \to n^2-3n-4n=0 \to n^2-7n=0$$

$n=0$ غ ق ق

$n(n-7)=0 \to n=7$ ✓



قضیه ۱) در هر متوازی الاضلاع زاویه های مقابل باهم برابرند: ۳

فرض: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

حکم: $A = C$, $B = D$

$AC = AC$

اثبات: قطر AC را رسم می کنیم: $ABC \cong ADC$ (ز ض ز)

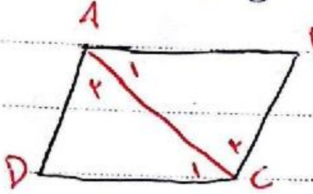
AC و مورب $AB \parallel DC \to A_2 = C_1$

AC و مورب $AB \parallel DC \to A_1 = C_2$

$\Rightarrow B = D$

$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \to A = C$

۱/ عکس قضیه ۱) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل برابر باشند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

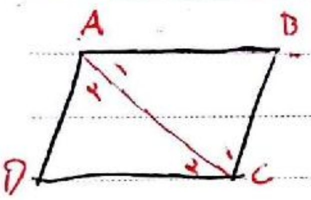


فرض: $B = D$ و $A = C$

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم.

قضیه ۲) در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند.



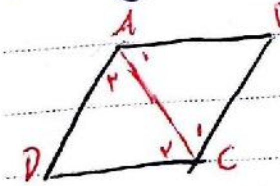
فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مورب } AB \parallel DC \rightarrow A_1 = C_2 \\ AC \text{ مورب } AD \parallel BC \rightarrow A_2 = C_1 \\ AC = AC \text{ مشترک} \end{array}\right\} ABC \cong ADC \text{ (ز ض ز)} \Rightarrow AB = DC ,\ AD = BC$$

عکس قضیه ۲) اگر در یک چهارضلعی ضلع‌های روبه‌رو دو به دو برابر باشند آنگاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $AB = DC$ و $BC = AD$

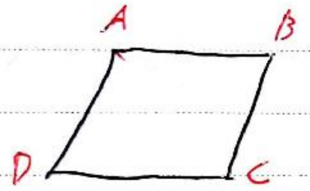
اثبات:

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \text{(ض ض ض)} \Rightarrow ABC \cong ADC \Rightarrow A_1 = C_2 \xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس خطوط}} AB \parallel DC$$

$$A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$$

Subject:
Date



قضیه ۲) در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

۲

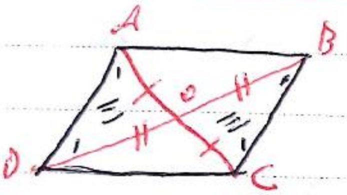
فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $A+B=180$ ، $D+C=180$ ، $A+D=180$ ، $B+C=180$

اثبات: کافیست یکی را اثبات کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C+D=360 \\ A=C \text{ و } B=D \ \text{(قضیه ۱)} \end{array}\right\} A+A+B+B=360$$

$$2A+2B=360 \xrightarrow{\div 2} A+B=180$$



قضیه ۴) در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $BO = OD$ و $AO = OC$

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مورب و } A\overset{D}{\ } \parallel \overset{B}{\ }C \Rightarrow A_1 = C_1 \\ BD \text{ مورب و } AD \parallel BC \Rightarrow D_1 = B_1 \\ \text{قضیه قبل می‌دانیم} \longrightarrow AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AOD \cong OBC \Rightarrow BO = OD, AO = OC$$

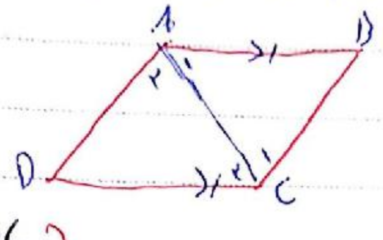
PAPCO

قضیه (۵) چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند، متوازی الاضلاع است.

فرض: $AB \parallel = DC$

$(A_2 = C_1)$

حکم: $AD \parallel BC$



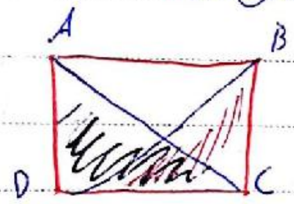
اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم:

فرض $AB = DC$
مشترک $AC = AC$
AC مورب $AB \parallel DC$ $A_1 = C_2$

$ABC \cong ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

در وقت حکم تساوی ضلع و تساوی زاویه بود از هم‌نهشتی کار ویم.

ویژگی های مستطیل و لوزی: ویژگی 1: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.



فرض: $A+B+C+D = 90$

حکم: $AC = BD$

$AD = BC$
$DC = DC$
$D = C = 90$

$A\hat{C}D \cong B\hat{C}D \Rightarrow AC = BD$

سوال: اگر دو قطر یک چهارضلعی باهم مساوی باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت آن مستطیل است؟ چرا؟

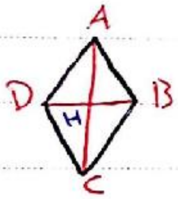
خیر - ذوزنقه متساوی الساقین دو قطر باهم مساوی اند ولی مستطیل نیست.

مربع هم یک مستطیل است پس قطرهای آن هم برابرند.

Subject:

Date

ویژگی 2) در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگر اند و قطرها نیم‌سازهای زاویه‌های لوزی اند.



فرض: $AB = BC = DC = AD$

حکم: $DH = HB$ ، $AH = HC$ (منصف) $H_1 = H_2 = 90$ (عمود) و $A_1 = A_2$ (نیم‌ساز)

اثبات: لوزی یک متوازی‌الاضلاع است پس قطرهایش منصف یکدیگر اند. (1)

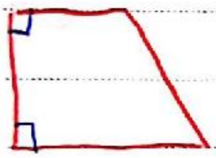
(2) $A_1 = A_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{فرض} & AD = AB \\ \text{مشترک} & AH = AH \\ \text{منصف} & DH = HB \end{array}\right\} ADH \cong AHB \ (\text{ض ض ض}) \Rightarrow H_1 = H_2 = 90 \quad (3)$$

(1) و (3) قطرها عمود منصف اند. (2) قطرها نیم‌سازند.

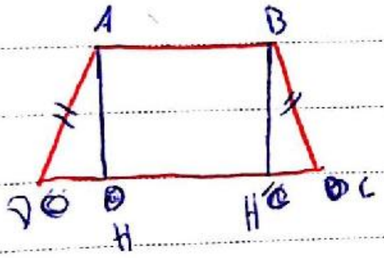
ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشد گوییم. به دو ضلع موازی قاعده‌ها و به دو ضلع غیرموازی ساق‌ها گفته می‌شود.

ذوزنقه متساوی الساقین: به ذوزنقه‌ای که ساق‌های آن باهم مساوی باشند ذوزنقه متساوی الساقین گوییم.



ذوزنقه قائم الزاویه: به ذوزنقه‌ای که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد.

ویژگی ۱) در هر ذوزنقه‌ی متساوی الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.



فرض: $AC = BD$ و $AB \parallel DC$

حکم: $A = B$ و $D = C$

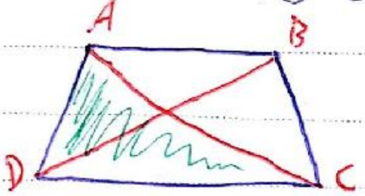
اثبات: دو ارتفاع AH و BH' را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ (فرض)} \\ AH = BH' \end{array}\right\} \Rightarrow ADH \cong BCH' \text{ (وتر و ضلع)} \Rightarrow D = C$$

$ABH'H$ چهارضلعی مستطیل است

هر وقت نیمسازهای یک متوازی الاضلاع را رسم کنیم یک مستطیل بدست می‌آید و
// // مستطیل // // مربع // //.

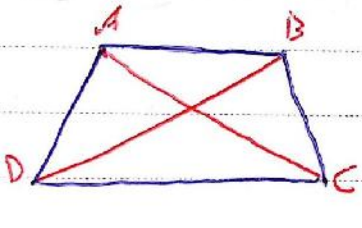
ویژگی ۲) در هر ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطرها باهم برابرند و برعکس.



فرض: $AD = BC$ حکم: $AC = BD$

اثبات به رفت:

$$\left.\begin{array}{ll} AD = BC & \text{فرض} \\ DC = DC & \text{مشترک} \\ D = C & \text{ویژگی 1} \end{array}\right\} \Rightarrow ADC \cong BCD \;(\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$



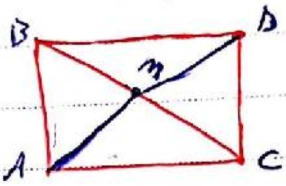
برگشت:

فرض: $AC = BD$

حکم: $AD = BC$

Subject:
Date

ویژگی مهم مثلث قائم الزاویه: در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.



فرض: $A = 90°$

حکم: $AM = \frac{BC}{2}$

اثبات: AM را به اندازه ی خودش از نقطه M امتداد می دهیم تا نقطه D حاصل شود و سپس D را با

D و C وصل می کنیم. چون چهارضلعی ABDC قطرهایش همدیگر را نصف کرده اند:

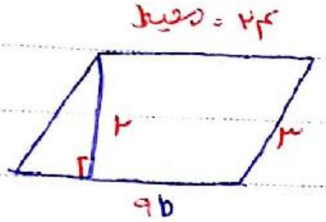
ABDC متوازی الاضلاع $\xrightarrow{A=90}$ مستطیل است ABCD $\Rightarrow$ $AD = BC$

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AD = 2AM \end{array}\right\} \quad 2AM = BC, \quad AM = \frac{BC}{2}$$

توضیح این درس در بخش فیلم

مثال ۵: مساحت شکل‌های زیر را حساب کنید.

الف)

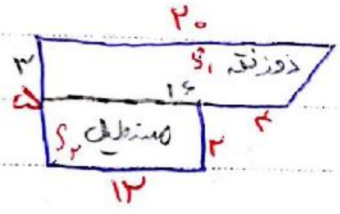


$P = ۲(۳) + ۲b$

$۲۴ = ۶ + ۲b \rightarrow$

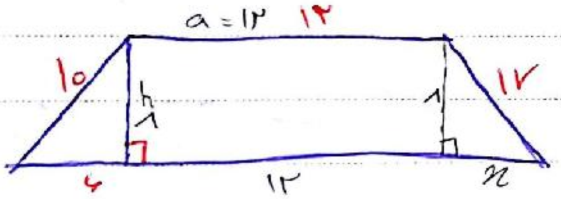
$\frac{۱۸}{۲} = ۹$

$S = b \times h = ۲ \times ۹ = ۱۸$



$S_1 = \frac{(۲۰+۱۶)۳}{۲} = ۵۴$

$S = ۲ \times ۱۲ = ۲۴ \rightarrow S = S_1 + S_2 = ۵۴ + ۲۴ = ۷۸$

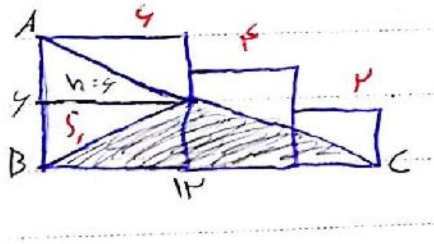


$۱۰^۲ = ۶^۲ + h^۲ \rightarrow h^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \rightarrow h = ۸$

$۱۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ \rightarrow ۲۸۹ = x^۲ + ۶۴ \rightarrow x^۲ = ۲۲۵$

$x = ۱۵$ $\quad S = \frac{(a+b)h}{۲} = \frac{(۱۲+۳۳)۸}{۲} = ۱۸۰$

مساحت قسمت هاشور خورده را حساب کنید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند)



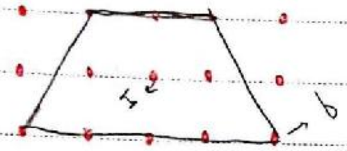
$S_{ABC} = \frac{۱۲ \times ۶}{۲} = ۳۶$

S هاشور خورده $\rightarrow S_{ABC} - S_1 = ۳۶ - ۱۸ = ۱۸$

$S_1 = \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸$

Subject:
Date

نقاط شبکه‌ای : به نقاطی که روی خط‌های افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی یک واحد می باشد را نقاط شبکه‌ای گوییم.

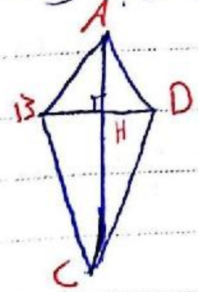


چند ضلعی شبکه‌ای : به چند ضلعی که تمام رأس‌های آن روی نقاط شبکه‌ای قرار داشته باشند. در هر چند ضلعی شبکه‌ای به نقاطی از شبکه که روی اضلاع چند ضلعی قرار دارد، نقاط مرزی گفته می‌شود و با b نام‌گذاری می‌شود و نقاطی از شبکه که درون چند ضلعی قرار می‌گیرد نقاط درونی گفته می‌شود و با I نام‌گذاری می‌شود.

مثلاً در چهارضلعی شبکه‌ای ABCD داریم : $I = ۳$ $b = ۸$

فرمول پیک در محاسبه مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای : اگر b نقاط مرزی یک چند ضلعی باشند و I نقاط درونی آن باشد، مساحت چند ضلعی از راه زیر به دست می‌آید : $S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$

نکته : در هر چهارضلعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، مساحت برابر نصف حاصل ضرب قطرهاست.



فرض : $AC \perp BD$

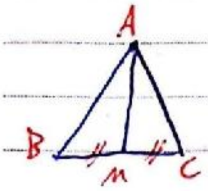
حکم : $S = \frac{AC \times BD}{۲}$ ①

$S_{کل} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{BD \times AH}{۲} + \frac{BD \times CH}{۲} = \frac{BD}{۲}(AH + CH) =$ ①

کاربردها (مساحت) :

سؤال (۱) : نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

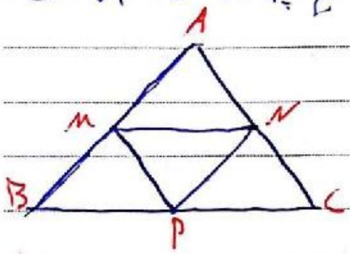


فرض: AM میانه $(BM=MC)$

حکم: $S_{ABM}=S_{ACM}$ ①

اثبات ①: $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow[BM=MC]{\text{فرض}}\frac{BM}{BM}=1 \rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{1}{1}$ ⇐ ①

سوال ۵: نشان دهید اگر وسط های هر سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم ۴ چهار مثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های مساوی ایجاد می شود.



فرض: M,N,P وسط اضلاع

حکم: ① مثلث های زیر با هم برابرند: $\hat{A}MN \cong M\hat{N}P \cong N\hat{P}C \cong M\hat{B}P$

② $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

③ و به همین ترتیب می توان ثابت کرد

۳

$MN \parallel BC$
$NP \parallel AB$
چهارضلعی MNBP متوازی الاضلاع است. $\rightarrow M\hat{N}P \cong M\hat{B}P$

و به همین ترتیب می توان ثابت کرد که چهار مثلث با هم هم نهشتند.

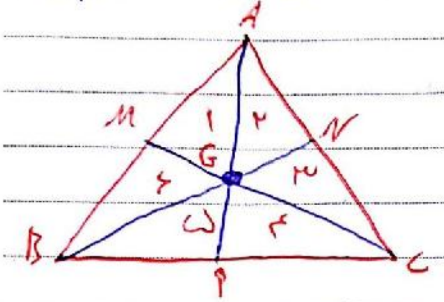
و داریم که اگر دو مثلث هم نهشت باشند مساحت های آنها برابر است

$S_{AMN}=S_{NPC}=S_{MNP}=S_{MBP}$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

سؤال ۳- نشان دهید سه میانه هر مثلث آن را به شش مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می کنند.



حکم: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ ☆

اثبات:

$\overset{\triangle}{AGC}$: میانه $GN \Rightarrow S_2 = S_3$ (۲)

BGC : میانه $GP \Rightarrow S_5 = S_4$ (۳)

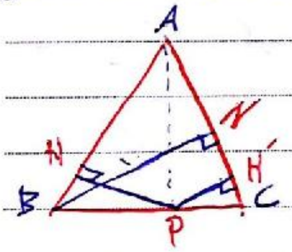
AGB : میانه $GM \Rightarrow S_1 = S_6$ (۱)

$S_1 + S_6 + S_5 = S_2 + S_3 + \cancel{S_4}$

$2S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ (۴)

(۱)(۲)(۳)(۴) $\Rightarrow$ ☆

سؤال ۴) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین مجموع فاصله ی هر نقطه روی قاعده از ساق‌های برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.



فرض: $AB = AC$

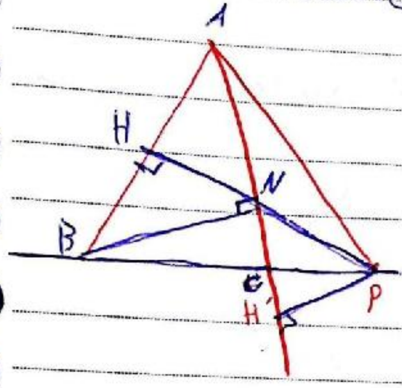
حکم: $PH + PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{\overline{AB}} \times PH}{2} + \frac{AC \times PH'}{2} \xrightarrow{AB=AC \text{ فرض}} \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}}$$

$$\frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH + PH') \rightarrow PH + PH' = BN$$

سئوال ۵) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین قدر مطلق تفاضل فاصله ی هر نقطه روی امتداد های هر قاعده از دو ساق برابر اندازه ی ارتفاع وارد بر ساق است.



فرض: $AB = AC$

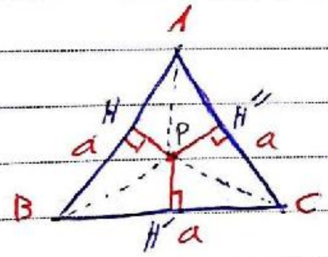
حکم: $PH - PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABP} - S_{ACP} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{AB} \times PH}{2} - \frac{AC \times PH'}{2}$$

$$AC = AB \rightarrow \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH - PH') \rightarrow PH - PH' = BN$$

سئوال ۶) ثابت کنید مجموعه فاصله ی هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.



فرض: $AB = AC = BC = a$

حکم: $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

اثبات: از P به A و B و C وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{APC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a \times PH}{2} + \frac{a \times PH'}{2} + \frac{a \times PH''}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^{\cancel{2}} = \frac{a}{2}(PH + PH' + PH'') \rightarrow PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

مثال ۵: اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌ی نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند

اندازه‌ی ضلع مثلث و مساحت مثلث است.

$PH = 2$, $PH' = 4$, $PH'' = 6$

$a = ?$, $S = ?$

$PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a \rightarrow 2 + 4 + 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow 12 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$\rightarrow \sqrt{3} a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a = 8\sqrt{3}$ ضلع مثلث

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} (8\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (64(3)) = 48\sqrt{3}$

PAPCO