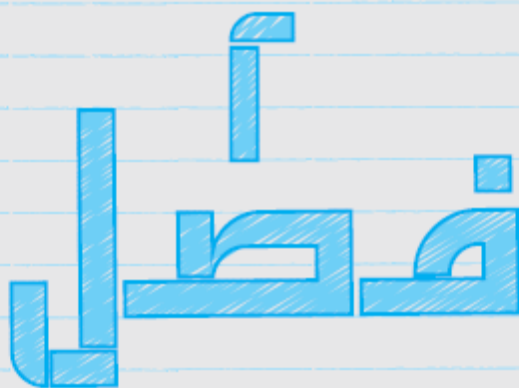
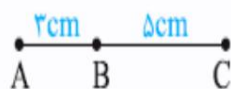




قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

نسبت: اگر a و b از یک جنس باشند (یعنی واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکی باشد) آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم.



واضح است که در نسبت $\frac{a}{b}$ همواره $b \neq 0$ می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل نسبت $\frac{AB}{BC}$ برابر $\frac{۳}{۵} = ۰/۶$ است.

تناسب: تساوی میان دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b \cdot d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به b و c وسطین گفته می‌شود، زیرا:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \div b = c \div d$$

ویژگی‌های تناسب

به کمک روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت:

① در هر تناسب، حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین برابر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

② اگر با تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ هر کاری کنیم که تساوی حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین یعنی $ad = bc$ به هم نریزد آن کار مجاز است. این کارهای مجاز عبارتند از:

● طرفین تناسب را می توان معکوس کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

● جای طرفین را با هم و جای وسطین را با هم می توان عوض کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

● ترکیب و تفذیل در صورت یا مخرج تناسب امکان پذیر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$$

● در هر تناسب می توان صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع و تفریق کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

دقت کنید ویژگی فوق را می توان تعمیم داد:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = k \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots}{b_1 + b_2 + \dots} = k$$

③ نکته: به طور کلی اگر در یک تناسب، هر کاری که روی صورت ها انجام می دهیم، همان کار را در مخرج ها نیز انجام دهیم، نسبت حاصل با نسبت های قبلی برابر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ax \pm cy}{bx \pm dy}$$

واسطه هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، مانند تناسب های $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$ یا $\frac{x}{a} = \frac{c}{x}$ ، با طرفین وسطین کردن تناسب به تساوی $x^2 = ac$ می رسیم که در این صورت x را واسطه هندسی a و c می گوئیم.

مثلاً اگر دو پاره خط به طول های ۴ و ۱۶ داشته باشیم، پاره خطی به طول ۸ واسطه هندسی بین آنها است، زیرا $۸^2 = ۴ \times ۱۶$ می باشد.

۱۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x + 2y + 3z$ کدام است؟

۱۶/۴ (۴)

۱۴/۶ (۳)

۱۶/۵ (۲)

۱۵/۶ (۱)

۲- اگر $\frac{24-a}{18-b} = \frac{a}{b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۳- اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، $\frac{2a+2b}{a+2b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{4}$

۴- از تناسب‌های $\frac{a+2b}{3} = \frac{2b-c}{6} = \frac{2(c-2b)}{7} = \frac{1}{4}$ ، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) $3/75$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) $3/25$

۵- نقطه‌های P و Q روی پاره خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. اگر $\frac{BP}{AP} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{QB}{QA} = \frac{3}{4}$ و $PQ = 2$ باشد، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۸ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

۶- در شکل مقابل $OA = 2$ ، $OB = 4$ ، $OC = 5$ و $OD = 7$ می‌باشد. نقطه P بین B و C طوری قرار دارد که

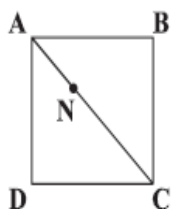


$\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC}$ ، در این صورت طول OP کدام است؟

- (۱) $4/6$ (۲) $4/2$ (۳) $4/8$ (۴) $4/5$

۷- روی پاره خط $AB = 12$ ، دو نقطه M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$ ، در این صورت طول پاره خط MN کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

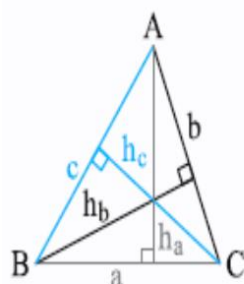


۸- در شکل مقابل، طول ضلع مربع ۶ و $\frac{NC}{AN} = \frac{3}{2}$ است. فاصله N از مرکز مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (۳) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

۹- اگر x واسطه هندسی b و c باشد، کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $\frac{x+c}{x+b} = \frac{c}{x}$ (۲) $\frac{x-c}{x-b} = \frac{c}{x}$ (۳) $\frac{x+c}{x+b} = \frac{c}{b}$ (۴) $\frac{x-c}{x-b} = \frac{c}{b}$



رابطه اضلاع و ارتفاع‌ها در مثلث

می‌دانیم مساحت هر مثلث از رابطه «ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ » به دست می‌آید، یعنی:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

با تبدیل هر یک از برابری‌های فوق به یک تناسب، می‌توان گفت «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.» مثلاً:

$$\frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b \Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

نتیجه: هر رابطه هم‌درجه‌ای که بین اضلاع یک مثلث برقرار باشد (چه رابطه مساوی، چه رابطه نامساوی)، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است. مثلاً:

در یک مثلث قائم‌الزاویه که رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در آن برقرار است، رابطه $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ نیز در آن برقرار می‌باشد.

سوال:

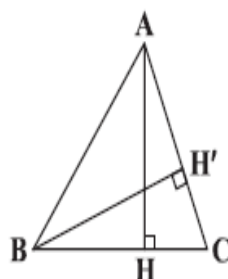
۱- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{AH}{BH'}$ با کدام نسبت برابر است؟

(۴) $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$

(۳) $\frac{BC}{AC}$

(۲) $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

(۱) $\frac{AC}{BC}$



۱۱- در مثلث ABC با طول اضلاع $a = 5$ ، $b = 6$ و $c = 9$ ، حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_a}$ کدام است؟

(۲) $\frac{45}{79}$

(۴) $\frac{79}{45}$

(۱) $\frac{78}{53}$

(۳) $\frac{53}{78}$

۱۲- در مثلث ABC ، طول اضلاع $a = 4$ ، $b = 6$ و $c = 8$ می باشد. حاصل $\frac{h_a^2}{h_b h_c}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴

۱۳- در مثلث ABC ، اگر $a < b < c$ باشد، کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) $h_a < h_b < h_c$ (۲) $h_a > h_b > h_c$ (۳) $h_b > h_c > h_a$ (۴) $h_b > h_a > h_c$

۱۴- در مثلث ABC ، اگر $a = 4$ ، $b = 6$ و $h_c = h_a + h_b$ باشد، اندازه ضلع c کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{6}$ (۳) $\frac{2}{8}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۱۵- در مثلثی اندازه های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم کدام

تجربی خارج ۹۵

است؟

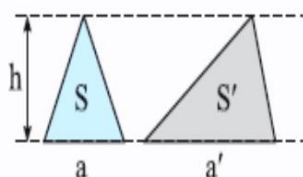
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۸

۱۶- در مثلث ABC ، اگر $h_a \times h_b = 16$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{ab}$ (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ (۳) $2\sqrt{ab}$ (۴) $4\sqrt{ab}$

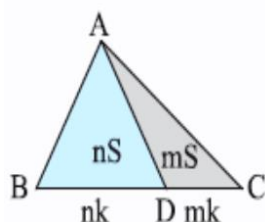
مساحت مثلث‌های هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

① با توجه به این که مساحت مثلث از رابطه «ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ » به دست می‌آید، اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازه قاعده‌هایی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.



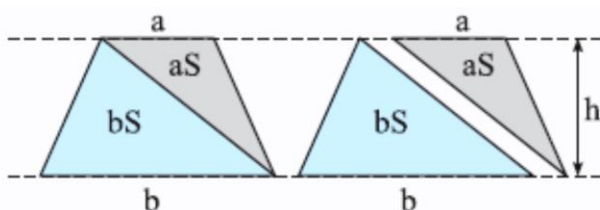
$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

اثبات:

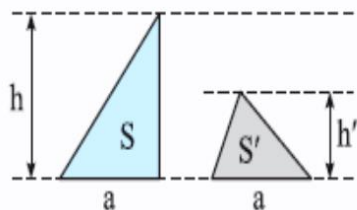


② **نتیجه:** الف) اگر خطی از یک رأس مثلث طوری رسم شود که قاعده را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، مساحت مثلث هم به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌شود.

ب) در دوزنقه‌ها وقتی یک قطر رسم می‌شود، نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده برابر نسبت قاعده‌ها است.



۱۶ اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه ارتفاع‌های وارد بر این قاعده‌ها است.

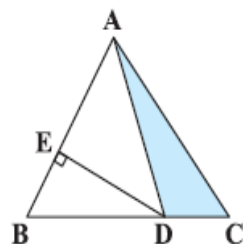


$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

اثبات:

سوال:

۱۸- در شکل مقابل، $AB = ۸$ ، $DE = ۶$ و $۲BD = ۳DC$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



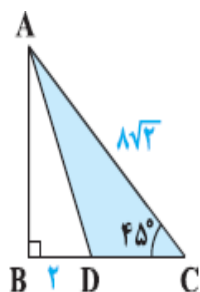
۱۸ (۱)

۱۶ (۲)

۱۲ (۳)

۲۰ (۴)

۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



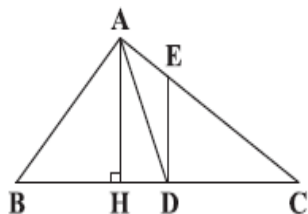
۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۲۰- در شکل مقابل، $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$ ، $CD = 6$ و $AH = 8$ می باشد. مساحت مثلث ADE کدام است؟



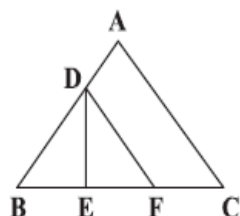
(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۴

(۴) ۹

۲۱- در شکل مقابل، $AD = 2BD$ و مساحت مثلث ABC برابر ۳۶ است. اگر $BE = EF = FC$ باشد،



مساحت مثلث DEF کدام است؟

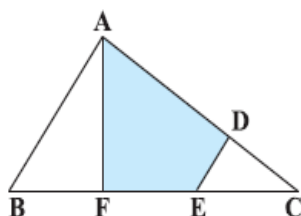
(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۱۲

۲۲- در شکل مقابل، $AD = 2DC$ و $BF = FE = EC$ می باشد. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۰ باشد،



مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱) ۶۰

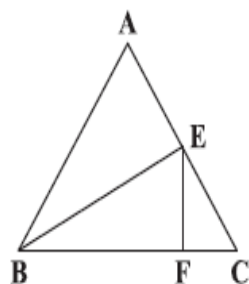
(۲) ۴۸

(۳) ۴۰

(۴) ۳۶

۲۳- در شکل مقابل، E وسط ضلع AC و $BC = 3CF$ می باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ باشد،

مساحت مثلث BEF کدام است؟



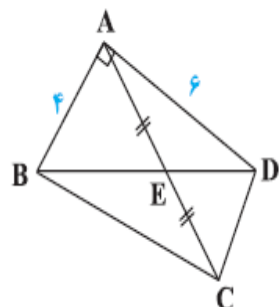
۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

۱۶ (۴)

۱۸ (۳)

۲۴- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



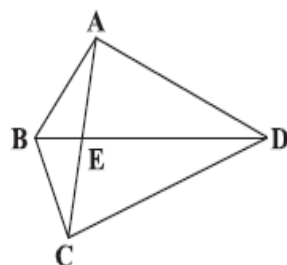
۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۲۷ (۳)

۳۲ (۴)

۲۵- در شکل مقابل، $ED = 4BE$ می باشد. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت چهارضلعی است؟



$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$\frac{2}{7}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

فعالیت ۱

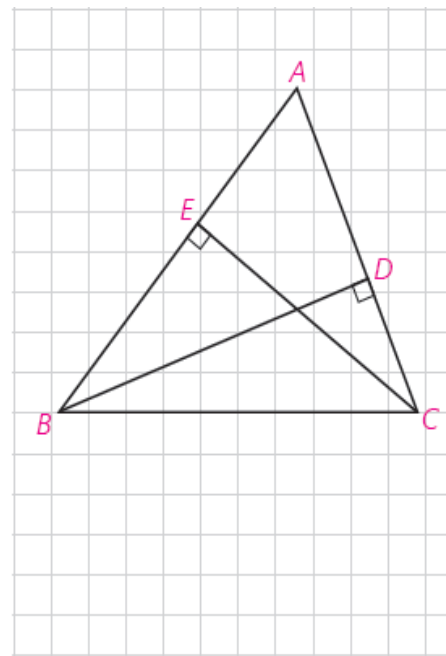
مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times \dots$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

— عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین: $AC \times \dots = \dots \times \dots$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟



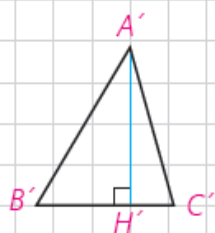
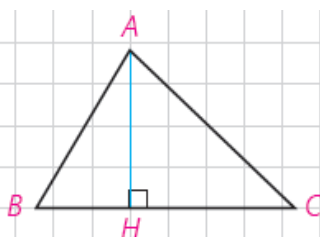
فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و $A'H'$ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$) با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

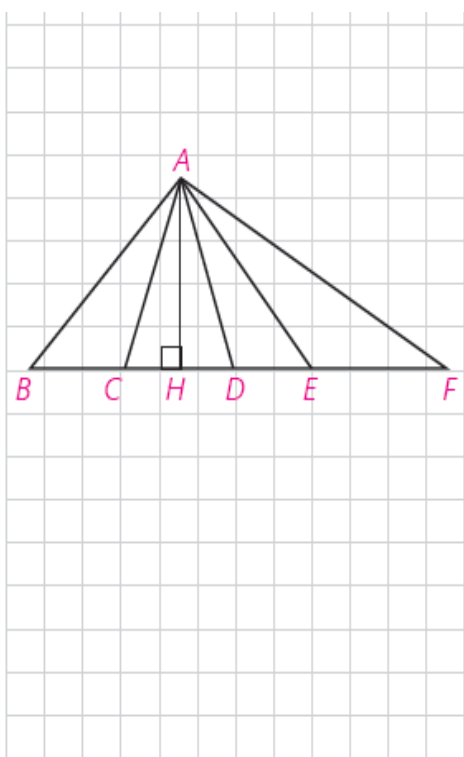
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \dots \times \dots}{\frac{1}{2} \dots \times \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$



نتیجه ۱

هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه این مثلث‌ها کدام پاره خط است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\dots}{\dots} \quad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\dots}{\dots} \quad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\dots}{\dots}$$

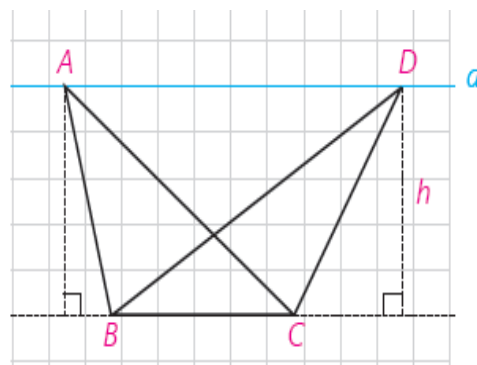
نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$

کاردکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

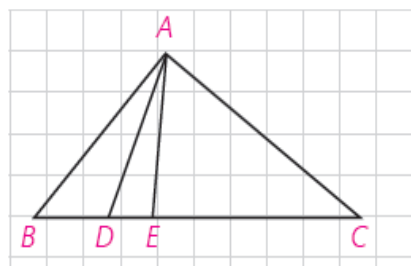


تمرین

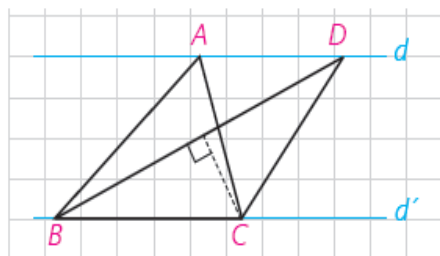
۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



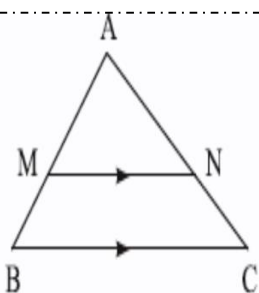
۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.



۵- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 8cm^2 است. اگر $BD = 6\text{cm}$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.



قضیه تالس



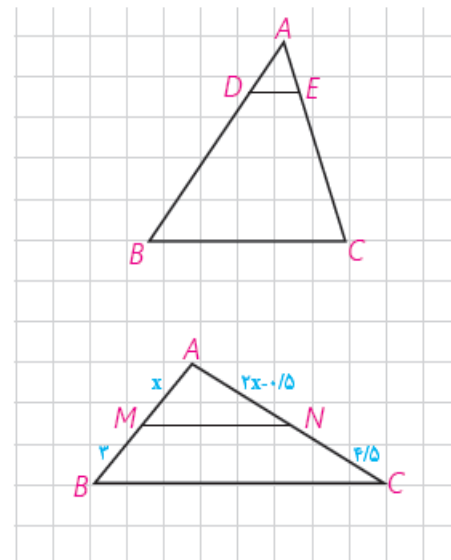
۱- **قضیه تالس:** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

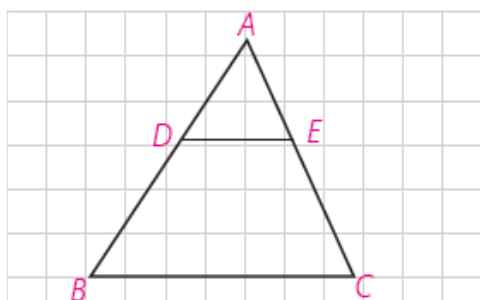
اثبات:

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=0.8$. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.



۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.

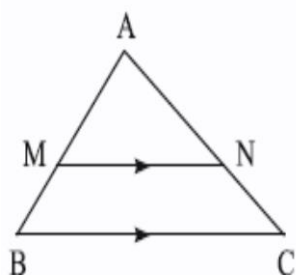


۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

نکته: به کمک خواص تناسب می توان قضیه تالس را به صورت های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{AN + NC}{NC} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$



۲. تعمیم قضیه تالس (تالس جزء به کل): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را

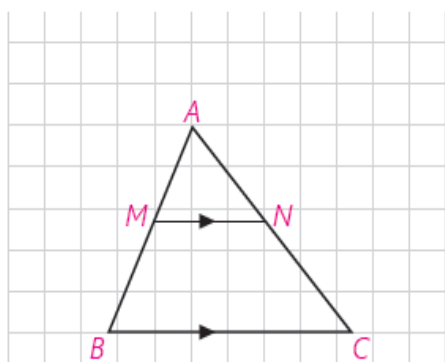
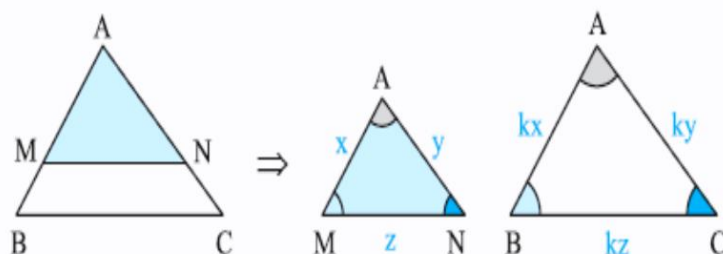
قطع کند، آن گاه مثلثی پدید می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است. به طور کلی اگر طول

پاره خط MN جزء داده ها یا خواسته های مسأله باشد، از تالس جزء به کل استفاده می کنیم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اثبات:

📌 **نتیجه:** اضلاع مثلث AMN با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب است و در ضمن زاویه‌های آنها نیز برابر می‌باشد (دو مثلث متشابه‌اند).

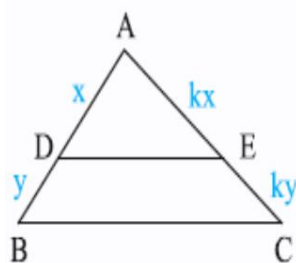


کاردکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

..... $\Rightarrow$

۳. **عکس قضیه تالس:** اگر در یک مثلث خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آنگاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.

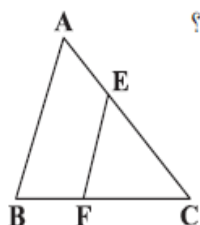


$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات:

سوال:

۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel FE$ ، $BF = m + 1$ ، $AE = 3m + 1$ و $\frac{EC}{FC} = \frac{5}{3}$ می باشد. طول پاره خط AE کدام است؟



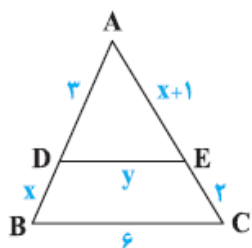
۲ (۲)

(۱) $\frac{3}{2}$

۳ (۴)

(۳) $\frac{5}{2}$

۳۰- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ است. $x + y$ کدام است؟



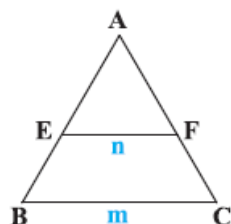
(۱) $5/6$

(۲) ۶

(۳) $4/6$

(۴) ۵

۳۱- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ ، $AB = 12$ ، $BC = m$ و $EF = n$ می باشد. اگر $2m^2 - mn - 3n^2 = 0$



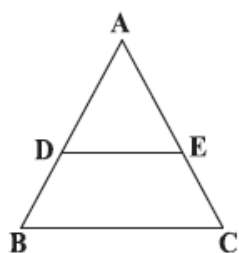
باشد، طول پاره خط AE کدام است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۸

(۴) ۹

(۳) ۶



۳۲- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ ، $DE = 3$ و $BC = 4$ است. حاصل $\frac{AD + AE}{DB + EC}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۳

(۴) $\frac{2}{7}$

(۳) $\frac{2}{5}$

۳۳- در شکل مقابل، تمام پاره‌های افقی موازی قاعده BC می‌باشند. اگر $EF = FL = LN = NB$ ،

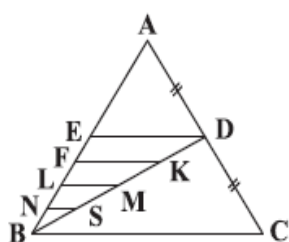
$NS = 2$ و D وسط ضلع AC باشد، طول ضلع BC کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۱۴



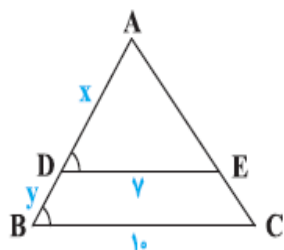
۳۴- در شکل مقابل، $\hat{B} = \hat{D}$ می‌باشد. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\frac{7}{10}$

(۴) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{7}{3}$



۳۵- در شکل مقابل، $AD \parallel BC$ و $AB \parallel CE$ می باشد. اگر $AD = 4$ ، $AB = 6$ و $EC = 15$ باشد، طول BC

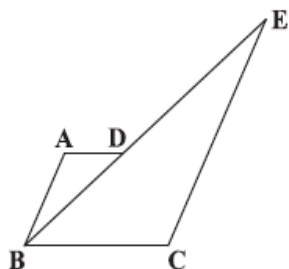
کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۷



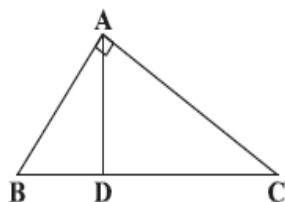
۳۶- در شکل مقابل، $AD = 4$ ، $BD = 2$ و $DC = 6$ می باشد. طول ضلع AC کدام است؟

(۲) $2\sqrt{6}$

(۱) ۶

(۴) $2\sqrt{10}$

(۳) $4\sqrt{2}$



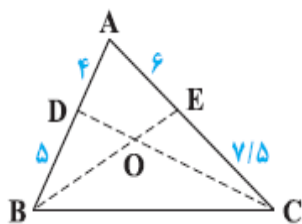
۳۸- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ تجزیه خارج ۸۷

(۲) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{2}{3}$

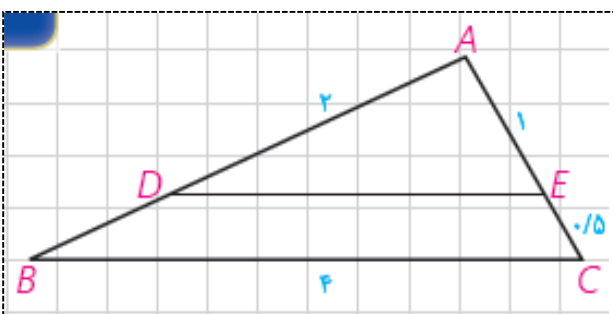
(۴) ۱

(۳) $\frac{5}{6}$

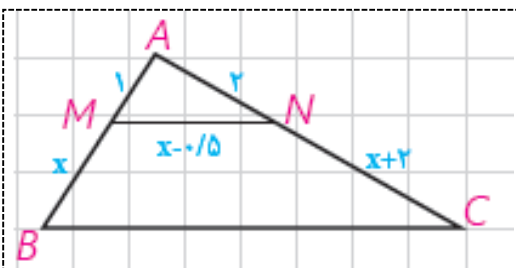




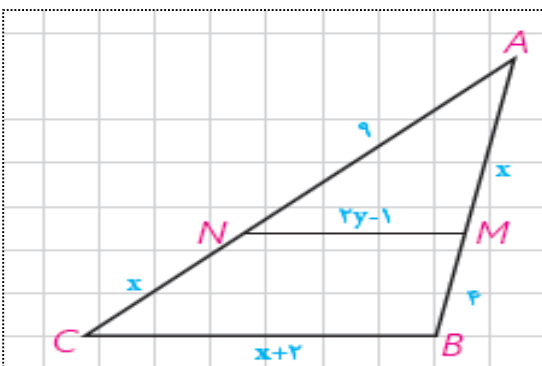
۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ با توجه به اندازه پاره خطها، طولهای AB و DE را به دست آورید.

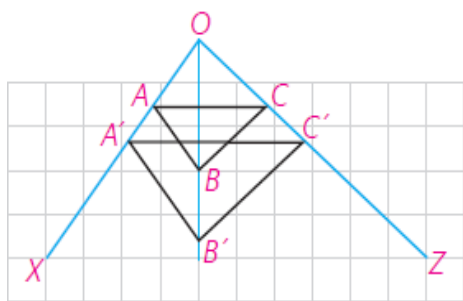


۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ ؛ مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

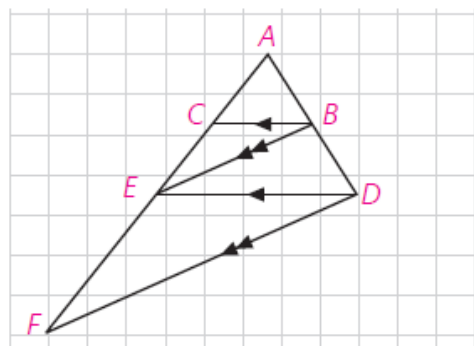


۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.

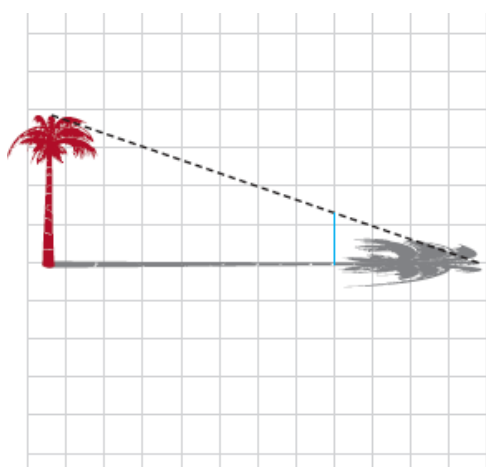




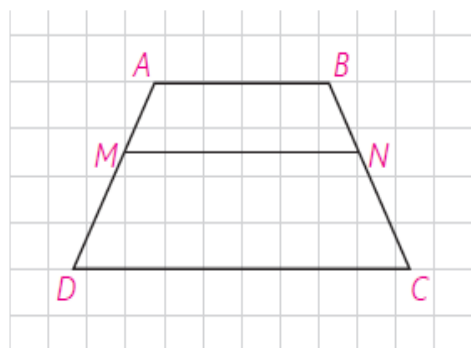
۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



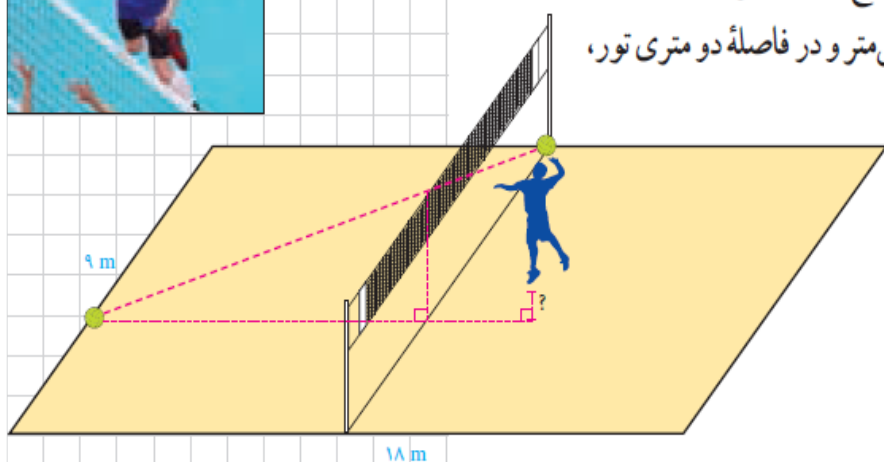
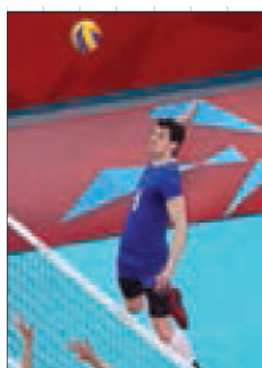
۶- یکی از کاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایهٔ درخت 6° متر، طول سایهٔ شاخص 3° متر و طول شاخص 1° متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷- در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (\text{قضیه تالس در ذوزنقه})$$

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع 9×9 تفکیک می شود و تور والیبال مردان با ارتفاع $2/43$ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد 180° سانتی متر و در فاصله دو متری تور،

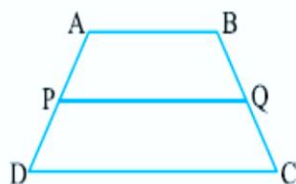
به هوا می پرد و تویی را که در ارتفاع 30° سانتی متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟

قضیهٔ میان خط در دوزنقه

اگر وسط دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره خطی به دست می آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات:

مثال ثابت کنید دو قطر دوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره خطی جدا می کنند که اندازه آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.



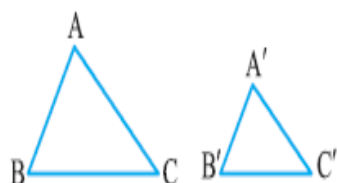
مثال در ذوزنقه شکل روبه‌رو، پاره خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{m}{n}$ ، نشان دهید

$$PQ = \frac{n \cdot AB + m \cdot CD}{m + n}$$



تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دوبه‌دو برابر و اضلاع متناسب هستند.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

اثبات:

توجه 1:

ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیه اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱ حالت دو زاویه برابر

۲ حالت سه ضلع متناسب

۳ حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر

توجه 2:

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

باشد، تناسب $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

۱ اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه روی زاویه های برابر باشند.

۲ در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع های AH

و $A'H'$ ، نیمسازهای AD و $A'D'$ ، میانه های AM و $A'M'$ که معنایش تناسب $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = \dots = k$ است.

۳ نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آنها برابر k^2 است.

مثال در مثلث ABC ، نقاط M ، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:

الف) نشان دهید $\triangle MNP \sim \triangle ABC$.

ب) نشان دهید محیط مثلث MNP ، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP ، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

مثال یک نقطه دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می کنیم تا مثلث به شش

ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجاد شده را S_1 ، S_2 و S_3 می نامیم. نشان دهید: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

قضایای تشابه مثلث ها:

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات:

قضیه ۲: هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

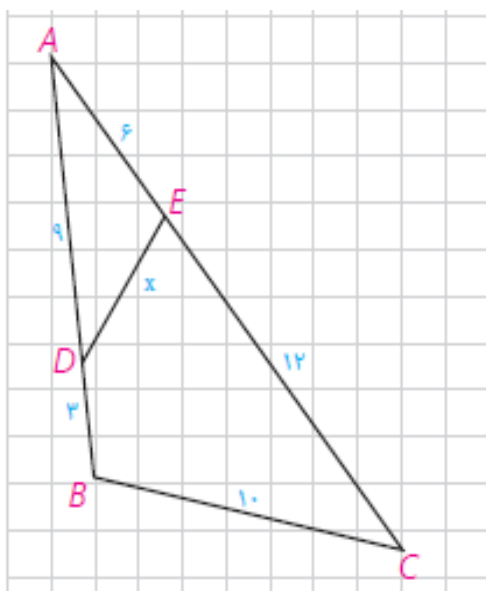
قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

مثال: در مثلث ABC ، از نقطه M وسط AC ، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.



اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

سوال 1:

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

حل:

سوال 2:

در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

$$۱) AB^2 = BC \cdot BH$$

$$۲) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$۳) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$۴) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$۵) AH \times BC = AB \times AC$$

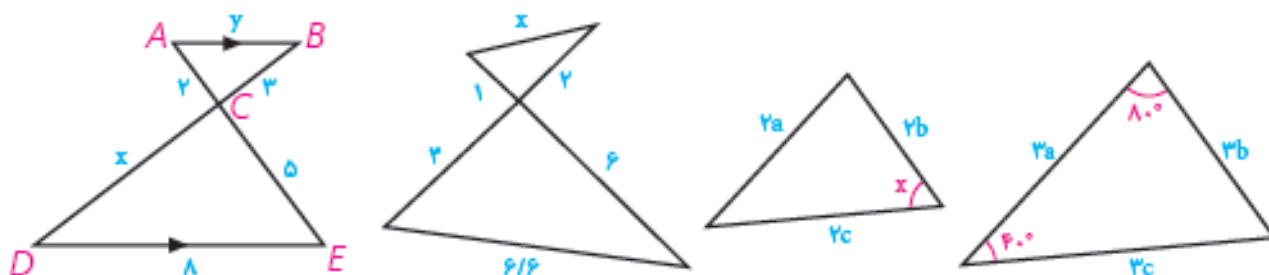
حل:

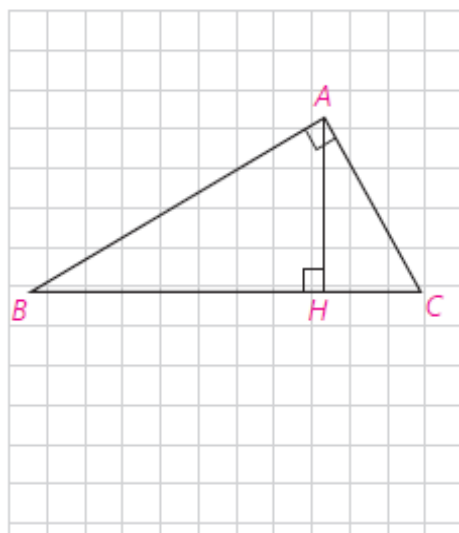


تمرین

۱- در هر یک از شکل های زیر، تشابه مثلث ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y

را مشخص کنید :





۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

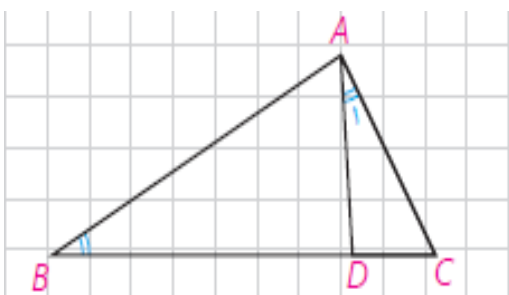
۱) $BH=9$ ، $CH=4$ ، $AH=?$ ، $AB=?$ ، $AC=?$

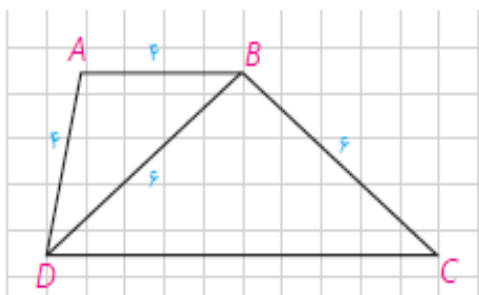
۲) $AB=10$ ، $BC=12$ ، $AC=?$ ، $AH=?$

۳) $AB=8$ ، $AC=6$ ، $BH=?$ ، $CH=?$

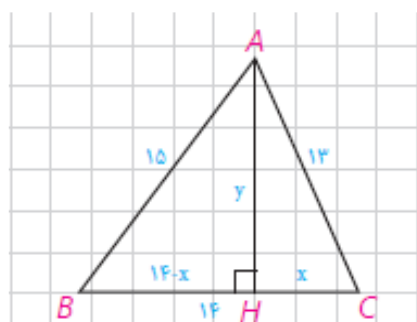
۴) $AB=8$ ، $AH=4$ ، $BC=?$ ، $AC=?$

۳- در شکل روبه رو $\angle A_1 = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.



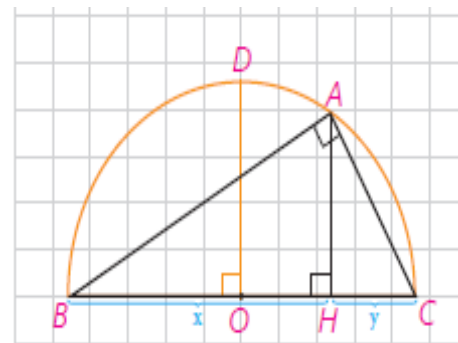


۴- در شکل روبه‌رو ABCD دوزنقه است. طول قاعده CD را به دست آورید.



۵- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۷- در شکل مقابل نیم دایره ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه دلخواه A روی محیط نیم دایره است.
الف) چرا زاویه A قائمه است؟



ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$$OD \square AH$$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

ت) آیا می توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

- ۸- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
- الف) عکس این قضیه را بنویسید.
- ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.
- (۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.
- (۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.
- (۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.
- (۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.
- ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.

پرسش های چهارگزینه ای

۱- اگر $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_n}{n}$ ، آن گاه حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

- (۱) n (۲) $n(n+1)$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴) $2n$

۲- اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ (۲) $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ (۳) $\frac{b-c}{a-b} = \frac{b}{c}$ (۴) $\frac{b+c}{a+b} = \frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b} = \frac{2c}{3d} = k$ ، آن گاه حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 8a^2c^2 + 16c^2}}{b^2 + 9d^2}$ کدام است؟

- (۱) k (۲) $2k$ (۳) k^2 (۴) $4k^2$

۴- اگر $k > 0$ ، $\frac{a}{2b} = \frac{3c}{d} = \frac{4e}{2f} = k$ ، حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 9c^2 + 16e^2}}{\sqrt{4b^2 + d^2 + 4f^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{k}$ (۲) k (۳) $2\sqrt{k}$ (۴) $4k$

۵- اگر $AB = a$ و $\frac{MA}{MB} = k$ ($k > 1$)، طول پاره خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

۶- اگر $AB = a$ و $\frac{NA}{NB} = k$ ($k > 1$)، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

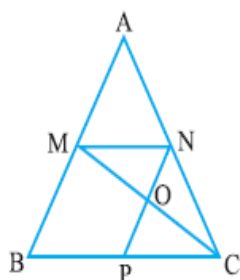
۷- اگر $AB = a$ و N نقطه ای روی امتداد AB باشد به گونه ای که $\frac{NA}{NB} = k$ ($k < 1$)، طول NB کدام است؟

- (۱) $\frac{ka}{1+k}$ (۲) $\frac{a}{1+k}$ (۳) $\frac{a}{1-k}$ (۴) $\frac{ka}{1-k}$

۸- اگر AB و MN دو پاره خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ و طول پاره خط $AB = a$ ، آن گاه طول پاره خط MN کدام است؟

(۱) $\frac{ak}{k^2 - 1}$ (۲) $\frac{2ak}{k^2 - 1}$ (۳) $\frac{ak}{1 - k^2}$ (۴) $\frac{2ak}{|1 - k^2|}$

۹- در شکل مقابل، $MNPB$ متوازی الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN ، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد، نسبت PC به MN کدام است؟

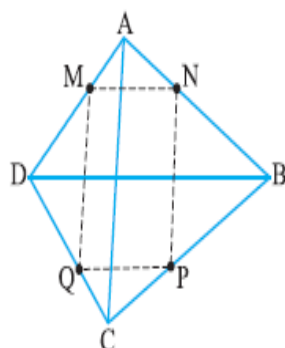


(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۰- وسط های اضلاع هر چهار ضلعی الزاماً رئوس کدام چهار ضلعی هستند؟

(۱) لوزی (۲) متوازی الاضلاع (۳) مستطیل (۴) مربع

۱۱- در شکل مقابل، $MNPQ$ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای $ABCD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{5}$ ، نسبت



قطر AC به BD کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، مربعی چنان محاط کرده ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر

ضلع مربع x باشد، آن گاه حاصل $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ کدام است؟

(۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $2x$ (۴) $\frac{2}{x}$

۱۳- در مثلث ABC ، از نقطه M وسط ضلع BC ، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC = 9$ و $BE = 8$ ، طول CF کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات:

مثال: در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به دست آورید.

مثال اگر در مثلث ABC ، AD و AD' به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD ، CD ، CD' و DD' را بر حسب اضلاع مثلث بیابید.

پاسخ:

۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

اثبات:

کاردکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

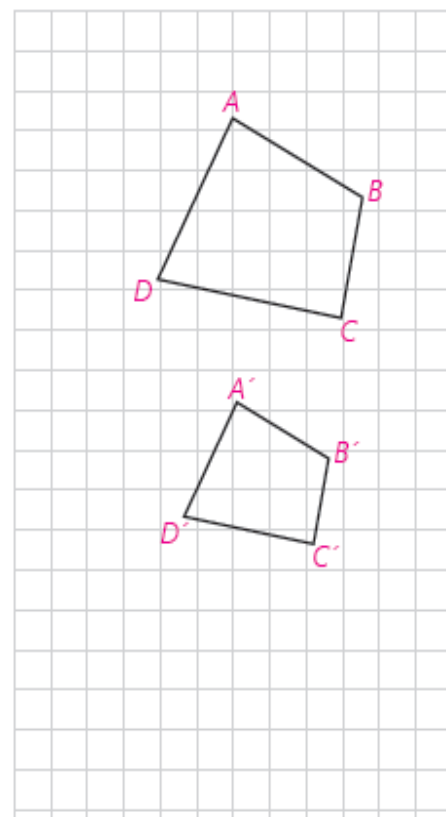
۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$



توجه:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.



کاردکلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10° و 18° واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها 12 واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

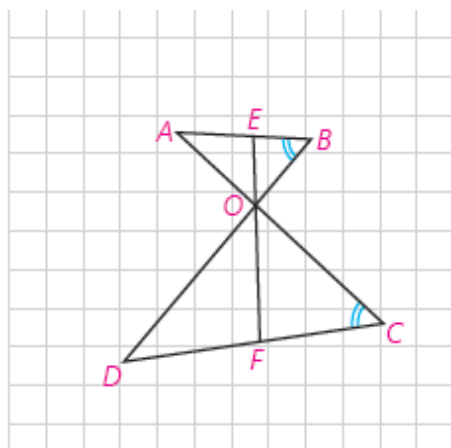
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 1 \text{ cm}$ و زاویه متقابل به رأس O است و $\angle B = \angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

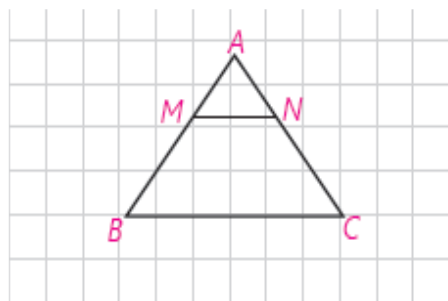
ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.



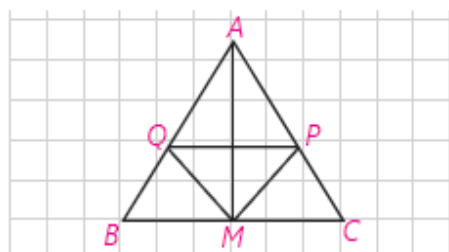
تمرین

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 10 و 12 و 15 سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10 سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.



۲- در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

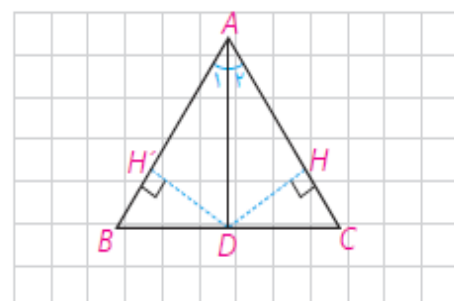
۳- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.



۴- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

$$PQ \parallel BC$$

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.
الف) با توجه به نتیجه (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.



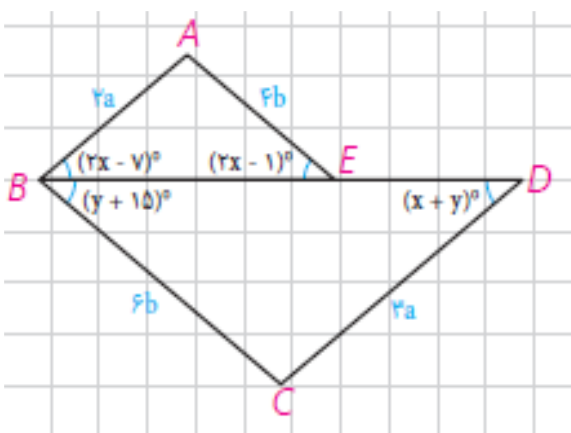
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

ب) چرا $DH=DH'$ ؟ با توجه به این موضوع و نتیجه (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

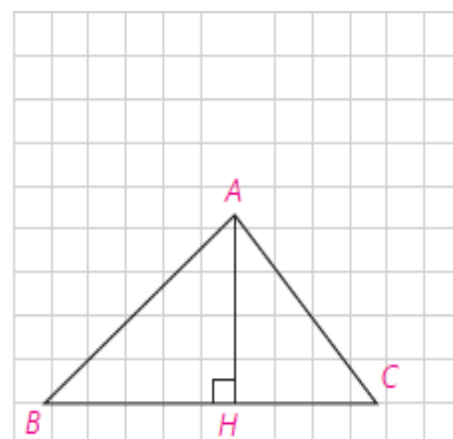
ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



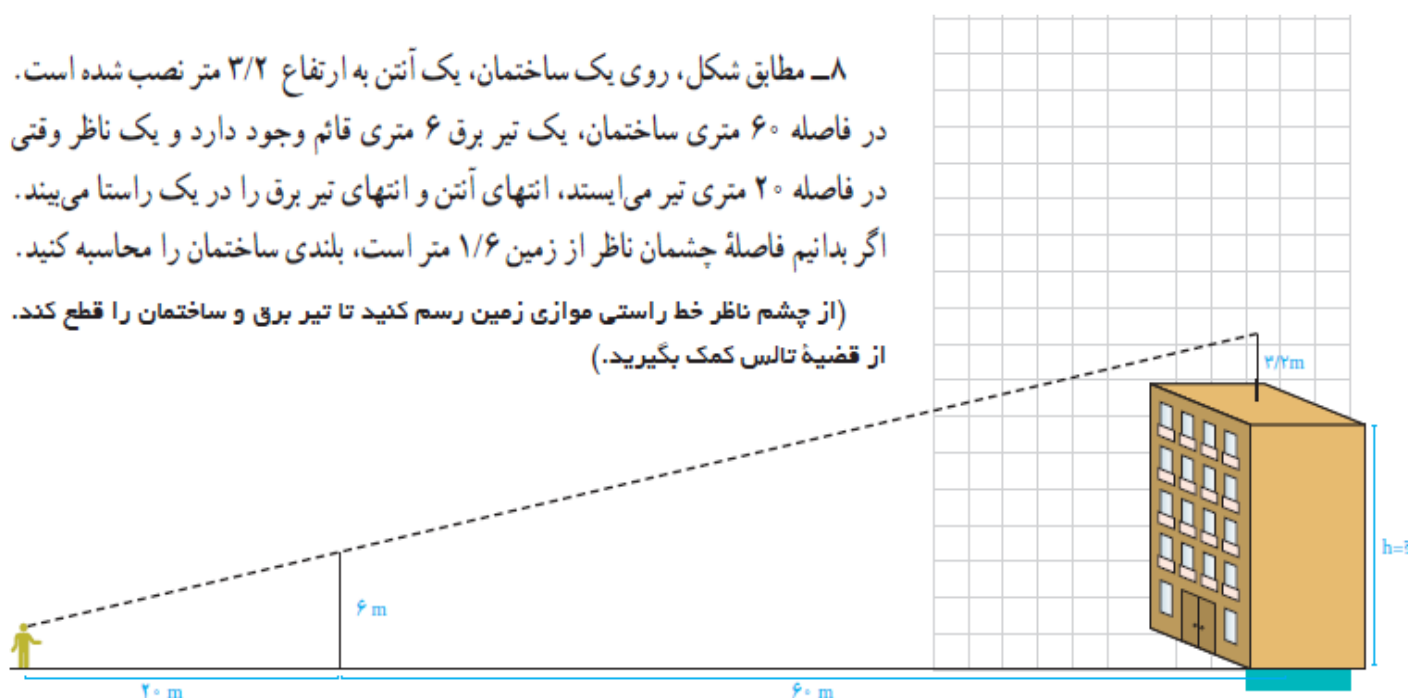
۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع، الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$



ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $\frac{3}{2}$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشمان ناظر از زمین $\frac{1}{6}$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)



۱- جاهای خالی را کامل کنید .

الف) مثالی که نشان می دهد ، یک حکم کلی نادرست است را می نامند .

ب) ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه ، آن را به دو مثلث تقسیم می کند .

ج) اگر نقطه ای روی یک پاره خط قرار داشته باشد ، آن نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

د) در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی از هر زاویه ی داخلی غیر مجاورش است .

۲- عکس قضیه ی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت یک قضیه ی دو شرطی بنویسید .

اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد ، قطرهايش همدیگر را نصف می کند .

۳- روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و شکل دقیق آن را رسم کنید .

۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ سانتی متر و طول یک قطر آن ۶ سانتی متر می باشد . طریقه ی رسم را توضیح دهید .

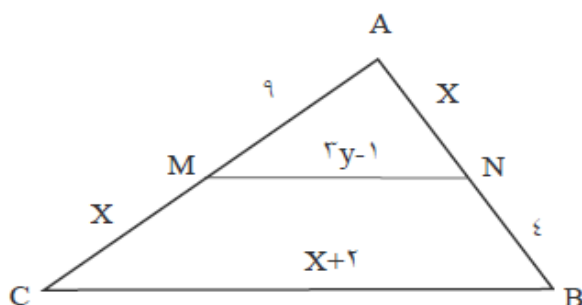
۵- طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی متر است . بلند ترین ارتفاع آن $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ سانتی متر می باشد . طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید .

۶- روش برهان خلف ثابت کنید . اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر ، بزرگ تر است .

۷- ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم‌رسند .

۸- اگر $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{2}{5}$ باشد حاصل $x + y + z$ را بیابید .

۹- در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بیابید .

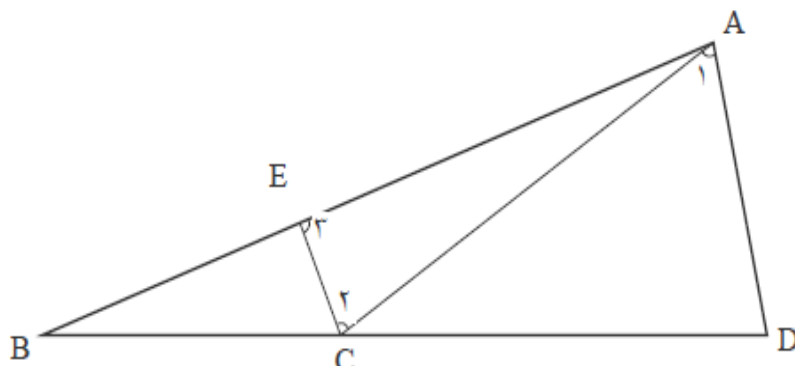


۱/۵

۱۰- در دوزنقه ی $ABCD$ ، $(BC \parallel AD)$ امتداد ساق ها یکدیگر را در نقطه ی O قطع می کنند از C خطی به موازات قطر BD رسم کرده تا امتداد AB را در E قطع کند . ثابت کنید :

۱

۱۱- در شکل مقابل زوایای $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ اگر $AB=15$ و $AC=6$ باشد $\frac{BD}{CD}$ را بیابید .



۱/۵

۱۲- قضیه : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند .

۱/۵

۱۳- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه ی هندسی است بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر .

۱/۵

۱۴- اندازه ی سه ضلع مثلثی ۱۶ و ۲۲ و ۱۹ سانتی متر هستند . اندازه ی پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه متوسط بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید .

۱/۵

۱۵- اندازه های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ می باشد . اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ متشابه باشد آن گاه مساحت مثلث دوم را بیابید .

موفق باشید