

Subject:

Year:

Month:

Date:

• نالین - تشابه دو ضلع

• فصل دوم

نسبت و تناسب: نسبت بین دو عدد A و B یعنی کسر $\frac{A}{B}$ $b \neq 0$

تناسب یعنی به دو نسبت مساوی هم یک تناسب داریم یعنی اگر دو نسبت $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$

متناسب باشند آنگاه $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ است

ویژگی های تناسب: الف) در هر تناسب حاصل ضرب جهات برابری حاصل

ضرب جهات: وسطین است $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = c \cdot b$

ب) در هر تناسب می توان نسبت ما را معکوس کرد $\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \rightarrow \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ج) در هر تناسب می توان بای طرفین را عموفاً کرد $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{4}{2}$

د) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می آید

ه) از تناسب های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ و $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ به دست می آید

۱) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به دست می آید مثال: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

Subject:

Year:

Month:

Date:

واسطه هندسی اگر بین سه عدد a, b, c تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ برقرار باشد

به عدد b واسطه هندسی گویند $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow b^2 = a \cdot c \rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$

مثال واسطه هندسی بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{12}$ را حساب کنید $b = ?$
 $b = \sqrt{\sqrt{3} \times \sqrt{12}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{1} \times \frac{12}{1}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{36}{1}}} = \sqrt{6} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

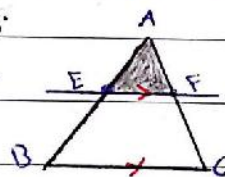
فصل دوم

قضیه تالس اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آن‌ها به نسبت

پاره قطعه‌های ایجاد شده روی یک ضلع با نسبت پاره قطعه‌های ایجاد شده روی ضلع دیگر برابر است.

نتایج تالس اگر در مثلث ABC $EF \parallel BC$ باشد

(۱) نتیجه $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ آن‌ها داریم



فرض $EF \parallel BC$

حکم $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

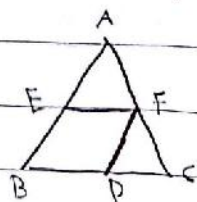
(۲) نتیجه $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ تعمیم تالس

اثبات نتیجه یک تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

اثبات $EF \parallel BC$ تالس ترکیب دو نتیجه $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \rightarrow \frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

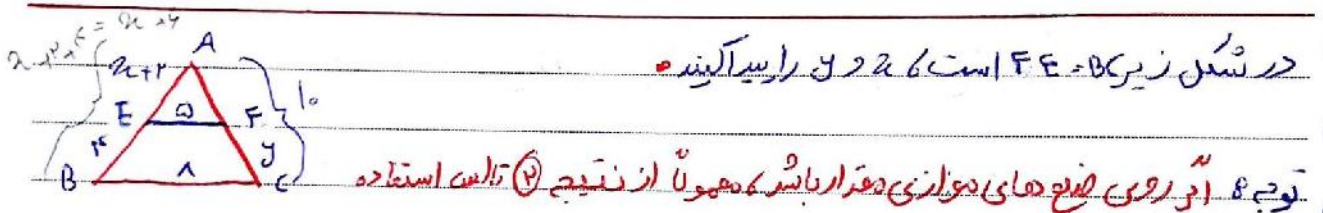
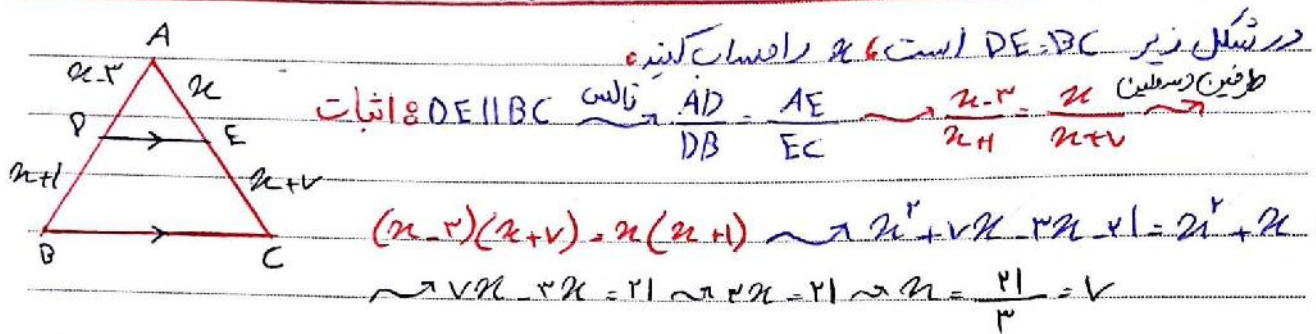
اثبات نتیجه دو تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

اثبات FD موازی AB رسم کنید



ALYAZ

Year.	Month.	Date.	()
-------	--------	-------	-----

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BD \xrightarrow{\text{alt } \angle} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ FD \parallel AB \xrightarrow{\text{alt } \angle} \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$


حل) $EF \parallel BC$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x+y}{x+y} = \frac{10-y}{10} = \frac{5}{1}$ مطلوب

$$\frac{n+y}{n+s} = \frac{\omega}{\lambda} \rightarrow \lambda(n+y) = \omega(n+s) \rightarrow \lambda n + \lambda y = \omega n + \omega s = \lambda n - \omega n = \frac{\lambda}{\omega} \cdot \omega n = \frac{\lambda}{\omega} \cdot \lambda s$$

$$\frac{1-y}{10} = \frac{\delta}{2} \rightsquigarrow 1(1-y) = 5 \rightsquigarrow 10 - 1y = 5 \rightsquigarrow -1y = 5 - 10 \rightsquigarrow -1y = -5 \rightsquigarrow y = \frac{-5}{-1} = \frac{5}{1}$$

عکس قضیه تالس ۸. اگر خطی دو ضلع متناهی را قطع کند و نسبت پارامترهای ایجاد شده روی دو ضلع ۶



اثبات: فرض کنیم EF موازی BC نباشد، از نقطه E باریه EF' موازی BC رسم کنیم.

$$\left. \begin{aligned} EF' \parallel BC &\xrightarrow{\text{Q.E.D.}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF'}{AC} \\ EF \parallel BC &\xrightarrow{\text{Q.E.D.}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AF'}{AC} = \frac{AF}{AC} \rightsquigarrow AF' = AF$$

GRA^PHIST.

Subject :

Year.

Month.

Date.

()

یعنی F روی هم منطبق هستند و چون EF' موازی BC است پس EF نیز موازی BC می باشد.

نکته: اگر در مسئله ای بخواهیم ثابت کنیم دو پاره برابر هستند یا پاره قطعی با یک ضلع مثلث موازی

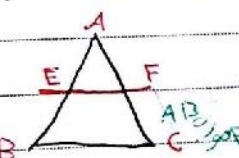
است که از عکس قضیه تالس یا عکس قضیه خطوط موازی استفاده می شود.

تساوی مثلث 8. دو مثلث را متساوی گوئیم اگر زاویه های آنها دو به دو مساوی باشند و ضلع های متناظر



$$ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} A = A' \text{ و } B = B' \text{ و } C = C' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2 \end{cases}$$
 متساوی باشند
 نسبت تضام

قضیه اساسی تساوی 8. اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند مثلث ایجاد شده با

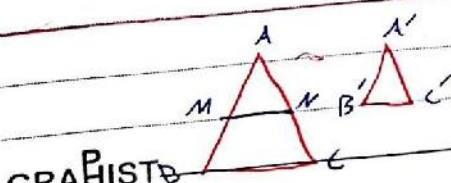

 مثلث اصلی متساوی است. $AEF \sim ABC$ **مقدمه** فرض $EF \parallel BC$
 $EF \parallel BC \Rightarrow \angle B = \angle E$
 $EF \parallel BC \Rightarrow \angle C = \angle F$
 $\Rightarrow AEF \sim ABC$
 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ **تعییم تالس**

حالات تساوی دو مثلث 8. هرگاه در زاویه از مثلثی که با دو زاویه از ضلعین دیگر هم اندازه باشند دو ضلع

متساوی است. **قضیه اول (تساوی در زاویه)** فرض $A = A'$ و $B = B'$ مقدمه $ABC \sim A'B'C'$

اثبات 8. روی ضلع AB پاره AM را مساوی $A'B'$ روی ضلع AC پاره AN را مساوی $A'C'$

$AMN \sim A'B'C'$ (فرض) $\Rightarrow MN = B'C'$ و $M = B'$ و $N = C'$
 $B = B'$ فرض $M = B'$ $\Rightarrow M = B$ **عکس قضیه** $MN \parallel BC$ **قضیه اساسی** $AMN \sim ABC$ **تساوی** $A'B'C' \sim ABC$



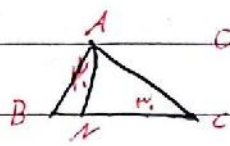
GRAPHIST

Subject:

Year:

Month:

Date:



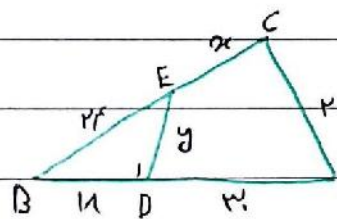
در شکل زیر الف) ثابت کنید در مثلث متساوی الساقین (ب) نسبت تشابه آنها چقدر است

الف) $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAN$ (تساوی درزاویه)
 ب) $\left. \begin{array}{l} A_1 = C_1 = 40^\circ \\ B = B \text{ مشترک} \end{array} \right\}$

ب) نسبت تشابه $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{AB}$ مع افتداد به تعبیر یکیم نسبت کدام را با کدام را با پس

موضوع هایی را صورت و منفرجه واری دهیم که روی روی زاویه مساوی قرار دارند در نسبت هم مشترک

خطی زنیع



در شکل زیر $C = D_1$ است مقدار x و y را پیدا کنید

(تساوی درزاویه) $\triangle ABC \sim \triangle BDE$
 $\left. \begin{array}{l} B = B \text{ مشترک} \\ C = D_1 \text{ قوی} \end{array} \right\}$

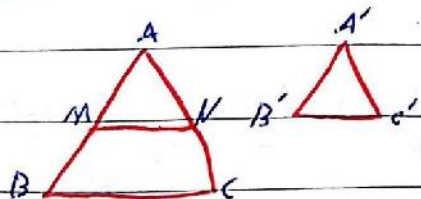
نسبت تشابه $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{CB}{DB}$

$\frac{24}{y} = \frac{41}{24} = \frac{24+x}{11}$

$\frac{41}{24} = \frac{24+x}{11} = \frac{24+x}{11} = \frac{36}{11} \Rightarrow x = 12$

تعبیر دوم تشابه در مثلث ۸ آن دو ضلع منفرجه با دو ضلع مثلث دیگر متناسب باشند زاویه بین

این دو ضلع در دو ضلع مساوی باشند آنجا در مثلث متناسب اند (تساوی در ضلع و تساوی زاویه بین)



$A = A'$ و $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ۸ قوی
 ۸ قوی $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

اثبات: روی ضلع AB پاره خط AM را مساوی $A'D'$ و روی ضلع AC پاره خط AN را مساوی $A'C'$ قرار

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

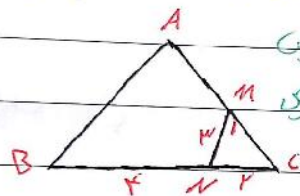
Date:

① $AMN \sim A'B'C'$ (فرض) ① $\Rightarrow MN = B'C'$ می کنیم و سپس از M به N وصل می کنیم.

$$\text{فرض} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \xrightarrow{\text{ثبات سیم}} \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad \xrightarrow{\text{ثبات سیم}} \quad MN \parallel BC$$

$$\text{ثبات قضیه اساسی} \quad AMN \sim ABC \quad \xrightarrow{\text{ثبات}} \quad ABC \sim A'B'C'$$

در شکل زیر $M_1 = B$ و M وسط AC است. طول اضلاع AB و AC را حساب کنید.



$\left. \begin{array}{l} M_1 = B \text{ مرکز} \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC$ (ثباتی در ضلع)

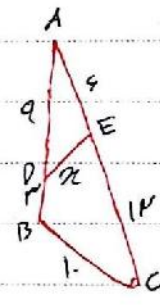
$$\frac{AC}{AB} = \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} = \frac{CM}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{4}{1}} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{AC}{12} \Rightarrow AC^2 = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$

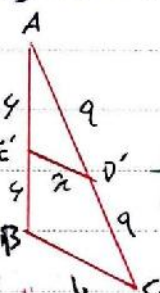
ALYAZ

$$\frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{AB} \rightarrow AB = 3\sqrt{6}$$

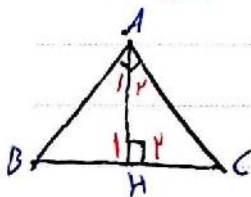
در شکل زیر را حساب کنید.

الف)  مشترک $A=A$
 $\frac{AD}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{1}{2}$
 $\frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (تناسب دو ضلع (نسبتی زوای بین و))

ب) روی AC AD' و AB AE' نام اندازه AE جدا کنید و نشان دهید

 $\frac{AE'}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
 $\frac{AD'}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{1}{2}$
 $\frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} \Rightarrow D'E' \parallel BC$ است.
 $K = \frac{1}{2} \quad \frac{BC}{2} = D'E'$

قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه... 8. آخر $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاویه ای باشد که



در رأس A قائمه باشد که AH ارتفاع دارد بر وتر آن باشد روابط زیر را داریم:

① $AB^2 = BC \cdot BH$ ② $AC^2 = BC \cdot CH$

③ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (قضیه فیثاغورس) ④ $AH^2 = BH \cdot HC$

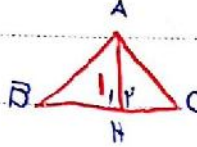
⑤ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

Subject:

Date:

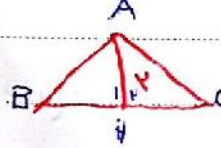
اثبات رابطه شماره ۱) ۸

$\left. \begin{array}{l} B = B \text{ مشترک} \\ 90^\circ H_1 = \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim ABH \text{ (تساوی در زاویه)}$


 $\rightarrow \text{نسبت تناسب} \rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$

اثبات رابطه شماره ۲) ۸

$\left. \begin{array}{l} C = C \text{ مشترک} \\ 90^\circ A = H_2 \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim ACH \text{ (تساوی در زاویه)}$


 $\rightarrow \text{نسبت تناسب} \rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot HC$

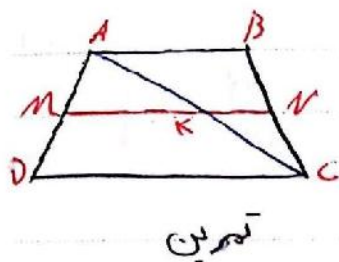
$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BH + BC \cdot HC = BC(BH + HC) = BC \cdot BC = BC^2$

$\left. \begin{array}{l} ABC \sim ABH \\ ABC \sim ACH \end{array} \right\} \Rightarrow ABH \sim ACH$

اثبات رابطه شماره ۴) ۸

$\left. \begin{array}{l} A_1 + B = 90^\circ \\ C + B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = C$

$\rightarrow \text{نسبت تناسب} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$



کلمه: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

۳۷۰ $MN \parallel AB \parallel CD$ فرض

تالس $\triangle ADC \text{ و } MK \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$

تالس $\triangle ABC \text{ و } NK \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$

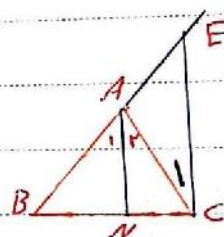
اثبات ۸ قطر AC را رسم کنید.

$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درس ۴ کاربرد های قضیه تالس و تشابه دو مثلث

قضیه ۱) در دو مثلث هر نیمه از زاویه داخلی قطع بر دو راس به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند.

فرض: $A_1 = A_2$ کلمه: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$



اثبات ۹ ابتدا E را موازی AN بر امتداد AB رسم می کنیم.

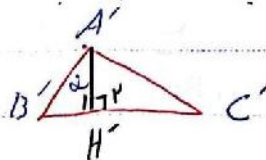
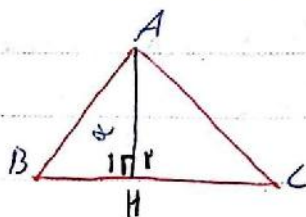
تالس $AN \parallel CE \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{NC}$ (۱)

$BE \text{ و } BN \parallel CE, A_1 = E$ فرض $E = C_1 \Rightarrow AE = AC$ (۲) $AN \parallel CE, A_2 = C_1$

$1, 2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

قضیه دوم) در هر دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر و نسبت

محیط ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.



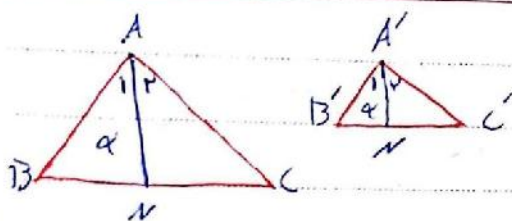
فرض: $ABC \sim A'B'C'$

(یعنی ضلع ها متناسب و زاویه ها برابر است) (الف) ارتفاع ها

کلمه: $\frac{AH}{A'H'} = k$

اثبات ۸
فرض $B = B'$
۹. $H_1 = H'_1$

$$\Rightarrow ADH \sim A'D'H' \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{AH'} = k$$



هات فرض قبل = فرض

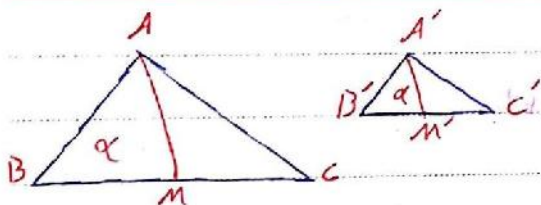
نیم سازه ۸

حکم ۸ $\frac{AN}{A'N'} = k$

فرض

اثبات ۸
فرض $B = B'$
۹. $A_1 = A'_1$

$$\Rightarrow ABN \sim A'B'N' \text{ (تساوی در زاویه)} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{BN}{B'N'} = k$$



قبل = فرض

میانه دعا ۸

حکم ۸ $\frac{AM}{A'M'} = k$

اثبات ۸
فرض $B = B'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'} \Rightarrow ABM \sim A'B'M'$$

فرض $B = B'$

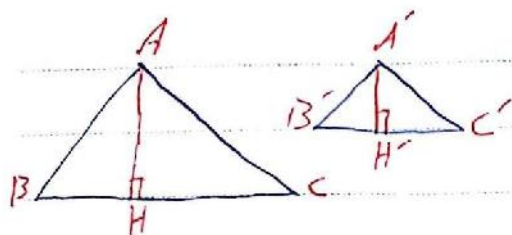
$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$$

صیغه ۸
فرض $B = B'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

فرض $B = B'$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$



(ارتفاع) AH

نسبت 8. $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k$

اثبات 8. $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} = k \times k = k^2$

اگر دو ضلع متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد، نسبت مساحت آن‌ها k^2 و نسبت ضلع به ضلع برابر k است.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$$

هر دو n ضلع منتظم همواره با هم متشابه هستند.

فصل 3

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن در برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \rightarrow n^2 - 3n = 4n \rightarrow n^2 - 7n = 0 \rightarrow n^2 - 7n = 0$$

$$n=0 \text{ و } n=7$$

$$n(n-7) = 0 \rightarrow n=7 \checkmark$$



قضیه 1) در هر متوازی الاضلاع زاویه‌های مقابل با هم برابرند.

$AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ به فرض

$A = C$ و $B = D$ به حکم

$$AC = AC$$

اثبات 8. قطر AC را رسم می‌کنیم (زیرا $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ و AC مشترک است) $\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (ض. ز) $\rightarrow B = D$

$$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \rightarrow A = C$$