

کتاب کار و آموزش

هندسه دهم

پایه دهم ریاضی و فیزیک



تدوین و گردآوری: روح الله ولی زاده

سال تحصیلی ۹۶-۹۷

فصل ۱: ترسیم های هندسی و استدلال	
درس اول: ترسیم های هندسی	
درس دوم: استدلال	
فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن	
درس اول: نسبت و تناسب در هندسه	
درس دوم: قضیه تالس	
درس سوم: تشابه مثلث ها	
درس چهارم: کاربردهای از قضیه تالس و تشابه مثلث ها	
فصل ۳: چند ضلعی ها	
درس اول: چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها	
درس دوم: مساحت و کاربردهای آن	
فصل ۴: تجسم فضایی	
درس اول: خط، نقطه و صفحه	
درس دوم: تفکر تجسمی	

بارم بندی

نوبت اول	نوبت دوم	نوبت شهریور
----------	----------	-------------

فصل ۱	۹	۳	۳
فصل ۲	۱۱	۴	۵
فصل ۳	-	۷	۷
فصل ۴	-	۶	۵

طرح درس سالانه هندسه (۱)

صفحه: ۱

نام دبیر:

رشته: ریاضی و فیزیک

پایه: دهم

ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
مهر	اول	۱۰	۱۳	ترسیم های هندسی، خواص نیمساز زاویه، خواص عمود منصف پاره خط
	دوم	۱۴	۱۷	رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط، حل تمرین
	سوم	۱۸	۲۱	استدلال، استقرا و استنتاج
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
آبان	اول	۲۲	۲۵	قضیه، عکس قضیه
	دوم	۲۶	۲۸	قضیه های دوطرفی، حل تمرین
	سوم	۳۰	۳۳	نسبت و تناسب، معرفی نسبت های مختلف، واسطه ی هندسی
	چهارم	۳۴	۳۷	قضیه ی تالس، عکس قضیه ی تالس، حل تمرین
آذر	اول	-	-	آزمون مستمر
	دوم	۳۸	۴۱	تشابه مثلث ها و قضیه های آن
	سوم	۴۲	۴۴	قضیه ی فیثاغورس، روابط طولی در مثلث قائم الزوایه، حل تمرین
	چهارم	۴۵	۴۸	کاربردهایی از قضیه ی تالس، قضیه ی نیمساز، نسبت اجزای فرعی
دی	اول	۴۹	۵۲	حل تمرین، آزمون مستمر
	دوم	آزمون نوبت اول		
	سوم			
	چهارم	۵۴	۵۷	تعریف چندضلعی، قطر چندضلعی، چندضلعی های محدب و مقعر، چهارضلعی های مهم، متوازی الاضلاع

صفحه: ۲

نام دبیر:

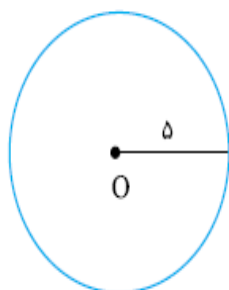
رشته: ریاضی و فیزیک

پایه: دهم

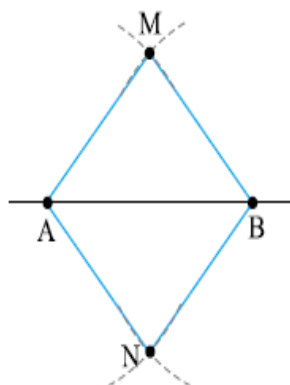
ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
بهمن	اول	۵۸	۶۱	ادامه ی متوازی الاضلاع ، ویژگی های مهم مثلث قائم الزاویه ، لوزی
	دوم	۶۲	۶۴	ذوزنقه ، حل تمرین
	سوم	۶۵	۶۸	مساحت و کاربردهای آن در حل مسائل
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
اسفند	اول	۶۹	۷۱	نقاط شبکه ای و مساحت
	دوم	۷۲	۷۶	حل تمرین
	سوم	۷۸	۸۱	خط، نقطه و صفحه و حالت های مختلف « دو خط » و « خط و صفحه » در فضا
	چهارم	۸۲	۸۶	حالت های مختلف دو صفحه ، تعامد دو صفحه ، حل تمرین
فروردین	اول	تعطیلات نوروز		
	دوم			
	سوم	۸۷	۹۰	تفکر تجسمی
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
اردیبهشت	اول	۹۱	۹۳	حل تمرین ، برش
	دوم	۹۴		حل تمرین ، دوران حول محور
	سوم	آزمون نوبت دوم		
	چهارم			

درس اول: ترسیم‌های هندسی

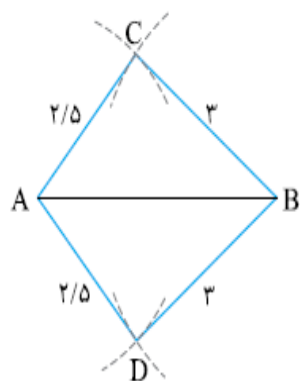
با این‌که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً، هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.



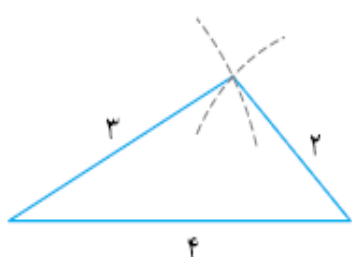
فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع 5 رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با 5 است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با 5 باشد.



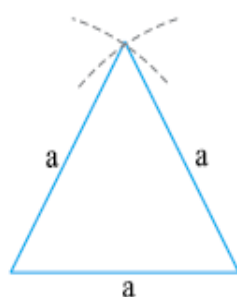
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی 4 سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $2/5$ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی 3 سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با $2/5$ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با $2/5$ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است.



مثال: می‌خواهیم مثلی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع ۲ و از سر دیگر آن کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.



مثال: می‌خواهیم مثلی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳- نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه A باشند.



۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

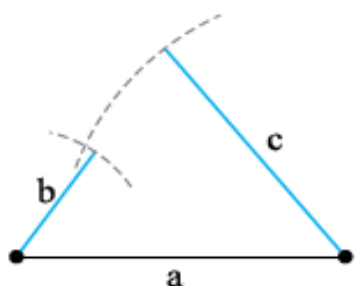
نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.

نتیجه فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این که مثلی به طول ضلع‌های a، b و c وجود داشته باشد، باید

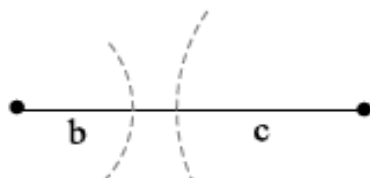
$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

زیرا

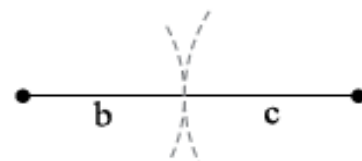
پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمائی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمائی بزنید. در این صورت، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c > a$.



$$b+c > a$$



$$b+c < a$$



$$b+c = a$$

توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c > b$. همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b > c$.

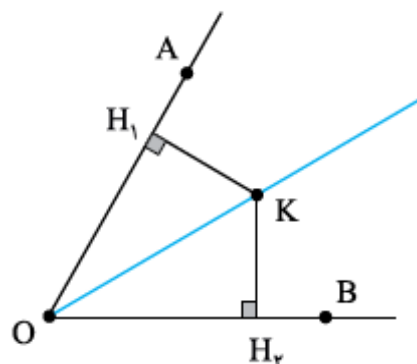
خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

مسئله 1:

نشان دهید هر نقطه‌ای که رو نیمساز یک زاویه باشد فاصله‌اش از دو سر نیمساز یکسان است و برعکس.

حل:

زاویه AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $\hat{H}_1OK = \hat{H}_2OK$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده‌ی همنهشت‌اند و در نتیجه $KH_1 = KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.



اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1 = KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $\hat{H}_1OK = \hat{H}_2OK$ ، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.
 - طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.
 - طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- اندازه زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

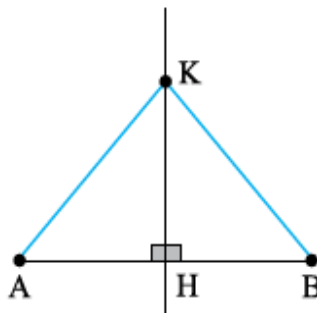
مسئله 2:

نشان دهید اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

حل:

پاره خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث های قائم الزاویه ای AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH) ، یک زاویه ای (قائمه ی) برابر دارند $(\hat{A}HK = \hat{B}HK)$ و دو ضلع برابر نیز دارند $(AH = BH)$.

بنابراین مثلث‌های AHK و BHK هم‌نهشت‌اند (ض‌ض) و در نتیجه $KA=KB$. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.



اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A ، B و H وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK هم‌نهشت‌اند (ض‌ض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $\hat{A}HK = \hat{B}HK = 90^\circ$ ، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

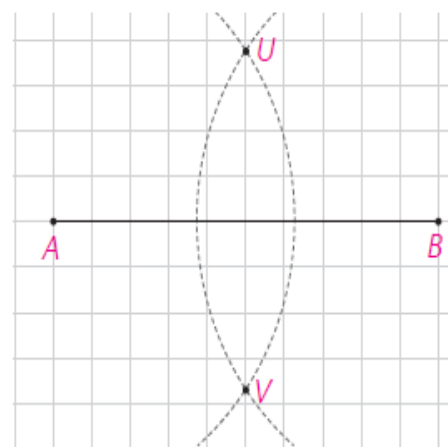
۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه موردنظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت

پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.



۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

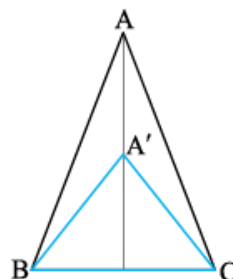
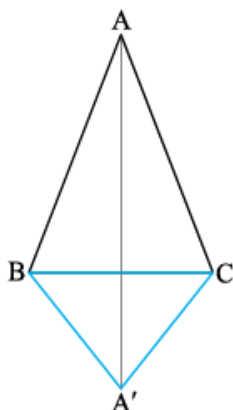
۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

کاردکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

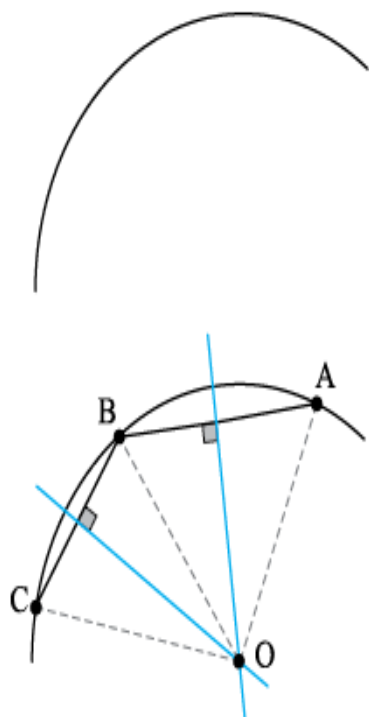
مسئله ۳ دو مثلث متساوی الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.

راه حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'BC$ متساوی الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون $AB=AC$ پس A روی عمود منصف BC قرار دارد و چون $A'B=A'C$ در نتیجه A' روی عمود منصف BC قرار دارد. بنابراین AA' عمود منصف ضلع BC است. پس خط AA' بر BC عمود است.



مسئله ۴

در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟



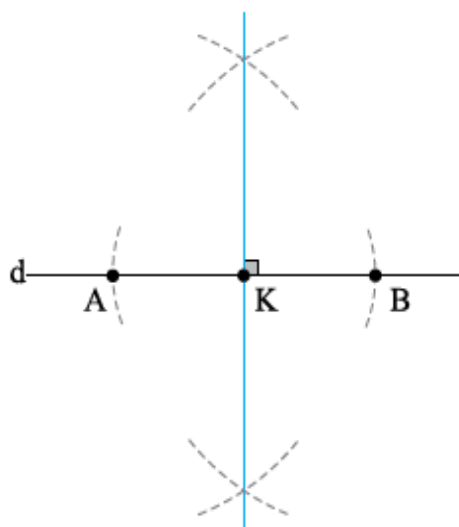
راه حل: سه نقطه‌ی A، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمود منصف پاره‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است. اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.

مسئله 5:

نحوه رسم خط عمود بر یک خط را توضیح دهید.

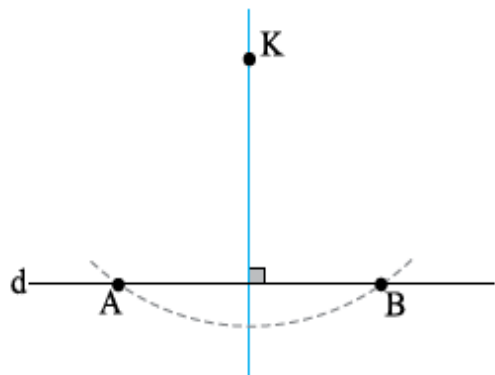
خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه‌ی K روی خط d است



به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌ی AB است. اکنون اگر عمود منصف پاره‌ی AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمود منصف پاره‌ی AB است.

ب) نقطه‌ی K خارج خط d است

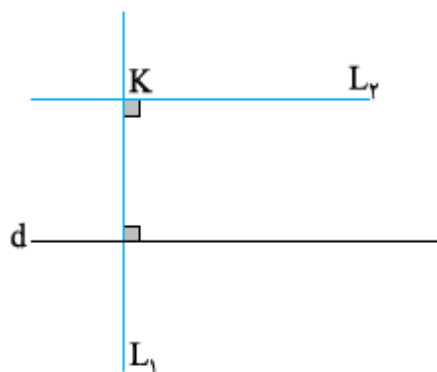


به مرکز نقطه‌ی K کمانی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

مسئله 6:

مراحل رسم خطی موازی با یک از یک نقطه غیر واقع بر آن را توضیح دهید.



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L_1 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر L_1 عمود باشد. در این صورت خط‌های d و L_2 بر خط L_1 عمودند، پس موازی‌اند.

فعالیت

پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد در نظر بگیرید.
 الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این
 عمود منصف با پاره خط AB ، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط
 C و D قطع کند.

پ) چهار ضلعی $ACBD$ چگونه چهار ضلعی ای است؟ چرا؟

کاردکلاس

طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

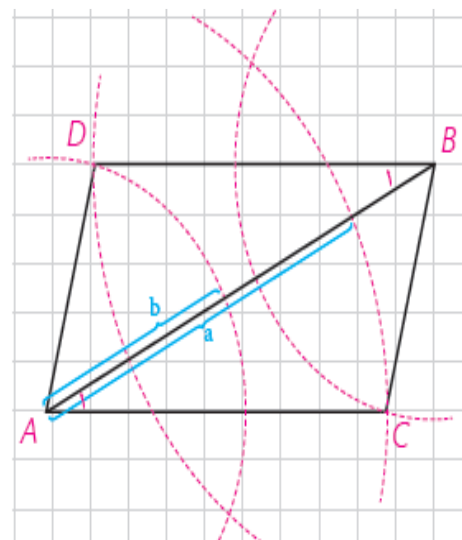


تمرین

۱- می دانیم چندضلعی ای که قطرهاش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است.
متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع
به طول قطرهای ۴ و ۷ می توان رسم کرد؟

۲- می دانیم چندضلعی ای که قطرهاش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است.
مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.

۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b
باز می کنیم و از نقطه A دو کمان می زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ تر
باشد) سپس کمان هایی با همان اندازه ها، این بار از نقطه B می زنیم و مانند شکل، دو نقطه از
نقاط برخورد را C و D می نامیم. چهارضلعی $ACBD$ چه نوع چندضلعی ای است؟ چرا؟
(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت
به هم چگونه اند.)



۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

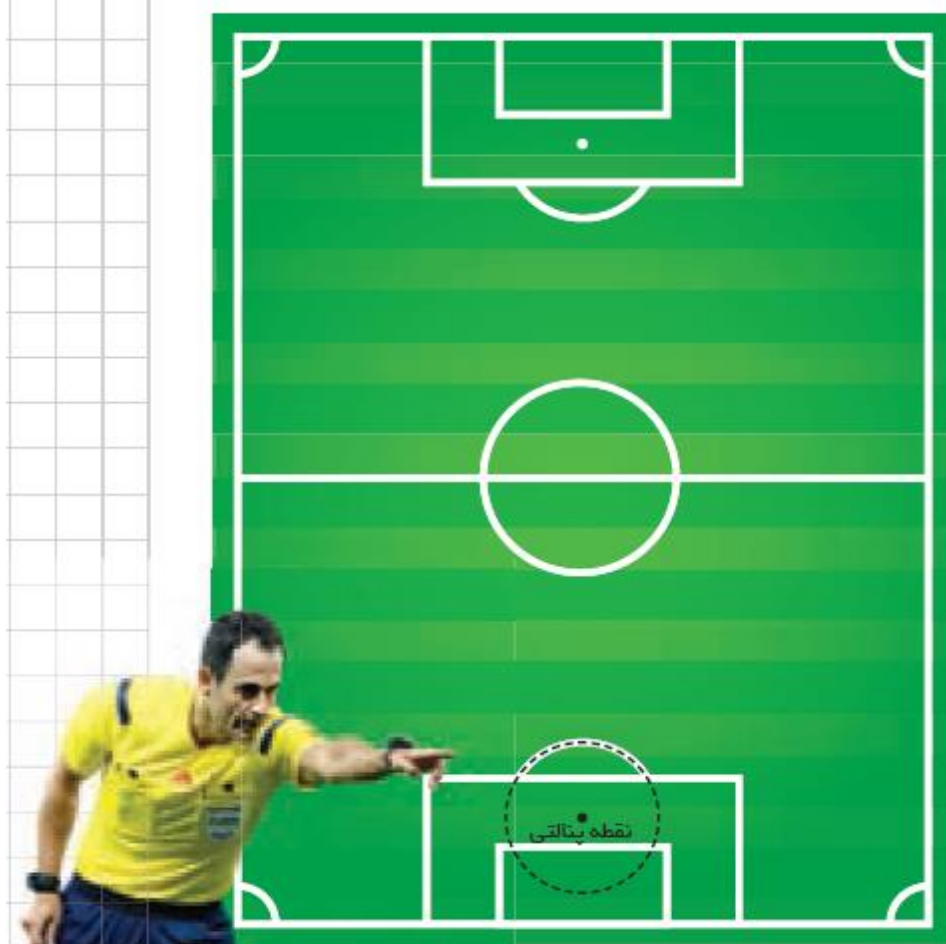
۵- می دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

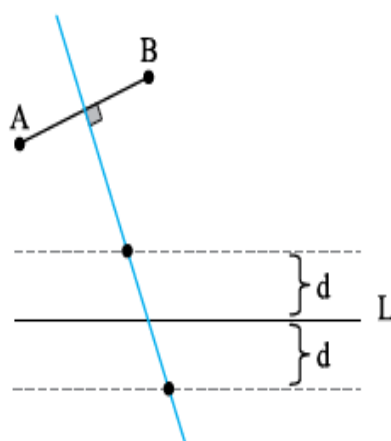
۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.
ب) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.
پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

آیا می دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟
یک داور فوتبال لحظه ای که اعلام پنالتی می کند، متوجه می شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



مسئله ۶ d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.



راه حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.

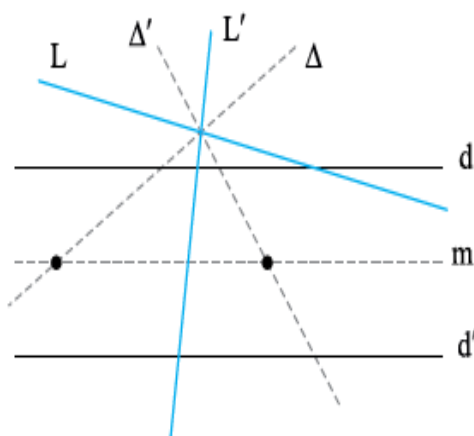
بحث در تعداد جواب:

حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

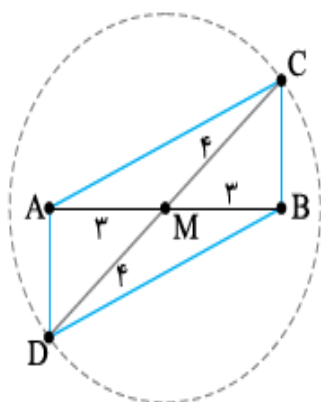
مسئله ۷ همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



راه حل: دو خط موازی را d و d' و دو خط متقاطع را L و L' می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d' به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d' ، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L' برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ' در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ' با خط m هستند.

مسئله ۸

متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جوابها بحث کنید.



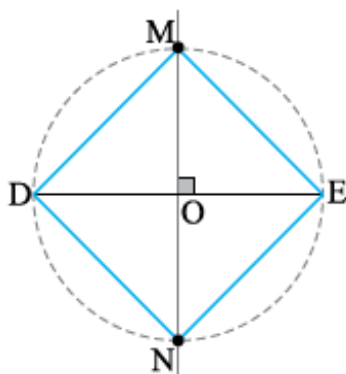
راه حل: می دانیم در متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می کنند. اکنون مطابق شکل پاره خط AB را به طول ۶ رسم می کنیم. وسط پاره خط AB را M می نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{AB}{2} = 3$ دایره ای رسم می کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می کنیم (مانند قطر CD در شکل، فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند). چهارضلعی ACBD متوازی الاضلاع مورد نظر است.

واضح است که نامتناهی متوازی الاضلاع با این ویژگی ها می توان رسم کرد.

مسئله 9:

مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد؟

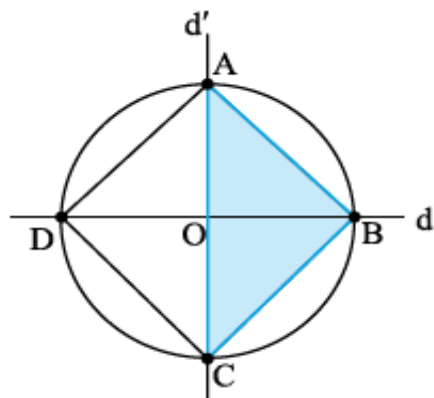
D ————— E



راه حل: می دانیم در مربع قطرهای عمود منصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمود منصف پاره خط معلوم DE را رسم می کنیم. سپس به مرکز نقطه ی O، وسط پاره خط DE و شعاع OE دایره ای رسم می کنیم. محل برخورد این دایره با عمود منصف DE را M و N می نامیم. چهارضلعی MEND مربع مورد نظر است.

مسئله 10:

مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به اندازهی وتر $4\sqrt{2}$ رسم کنید.



راه حل: می‌دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمود منصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d' را رسم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $2\sqrt{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط d و d' را در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کند. در این صورت $ABCD$ مربع به قطر $4\sqrt{2}$ است. به این ترتیب مثلث قائم الزاویه ABC مثلث مورد نظر است.

درس دوم

استدلال:

استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد.

انواع استدلال‌ها در ریاضیات

1- شهودی 2- تمثیلی 3- استقرائی 4- استنتاجی

استدلال شهودی:

استدلال شهودی مبتنی بر درک شهودی است و به نوعی درک بدون استدلال است و به وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی :

تأیید صحت یک اصل ، موضوع یا یک خبری با استفاده از مثال به عبارت دیگر یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون و ارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج.

به طور کلی و با بیان ساده (می توانیم بگوییم) منظور از استدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم با استفاده از مثال و مشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است و در استدلال استقرایی از جزء به کل می رسیم

به عبارت دیگر در استدلال استقرائی ، با استفاده از انجام آزمایش و مشاهده ی تعداد محدودی از مشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم

نکات :

هر استدلالی که بر پایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه از استدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبار آزمایش می نمودند و پس از بررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند

استدلال استقرائی در صورتی عمومیت دارد و قابل استناد است که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود

در استدلال استقرائی از یک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی میگیریم و در واقع از جزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن ها را قبلاً پذیرفته ایم .

نمونه های از انواع استدلال و توجیه و تحلیل هر کدام

نمونه	استدلال	توجیه یا تحلیل
بیان این نکته که "کوه تاه ترین فاصله بین دو نقطه به صورت خط مستقیم است"	شهودی	با استفاده از درک شهودی می توان مشاهده کرد خط مستقیم کوتاه ترین فاصله است
بدست آوردن فاصله ی سیارات از خورشید توسط گالیله	استقرائی	مبنای اولیه کار آنها آزمایش وحدس و بازهم آزمایش بوده است
خارج قسمت اعداد چهار رقمی abab بر ۱۰۱	استنتاجی	با استناد به دانسته هایمان در مورد ارزش مکانی، قانون تقسیم و فاکتورگیری و... این نتیجه محقق می شود
تشخیص اوقات شرعی با استفاده از سایه اشیاء و رویت ستارگان	شهودی	درک به وسیله ی حواس در آنچه که در پیرامون ما می گذشته است
برگ درختان سبز در نظر هوشیار	شهودی	بر پایه شهود است - نظر کردن به نشانه های هستی
هرورقش دفتر نیست معرفت کردگار		حدس و آزمایش نیاز نیست - پیش نیاز نمی خواهد..
		بدون استدلال است

بهترین و محکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. **فرض:** خواص لوزی **حکم:** برابر بودن زاویه های روبه رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. **فرض:** دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع **حکم:** برابر بودن دو مماس

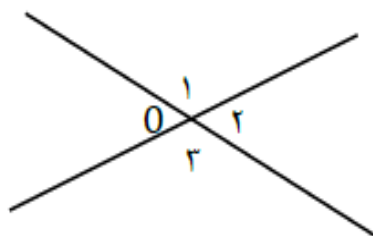
مثال: با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید:

الف) $\left. \begin{array}{l} \text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \\ \text{لوزی نوعی مربع است} \end{array} \right\}$ $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگرند

ب) $\left. \begin{array}{l} \text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است} \\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است} \end{array} \right\}$ $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

مثال: ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.

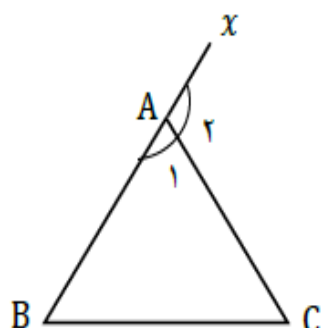
فرض: $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ دو زاویه متقابل به راس **حکم:** $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال: ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.

فرض: $\hat{A}_2$ زاویه ی خارجی مثلث **حکم:** $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته: سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند:

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث:

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

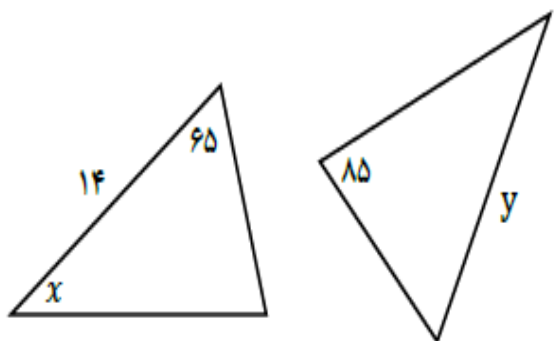
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته: در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجموع زاویه های داخلی مثلث 180° درجه است) $180 - (85 + 65) = 30$

$$x = 30, \quad y = 14$$

قدم های حل مسئله: برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است:

(۴) راهبرد حل مسئله

(۳) نوشتن فرض و حکم مسئله

(۲) رسم شکل

(۱) درک و فهم مسئله

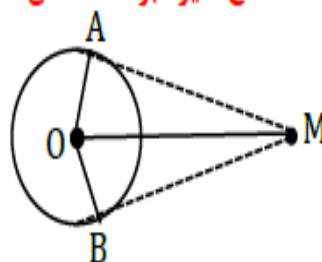
مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

حکم: $MA = MB$



گام دوم: (رسم شکل)

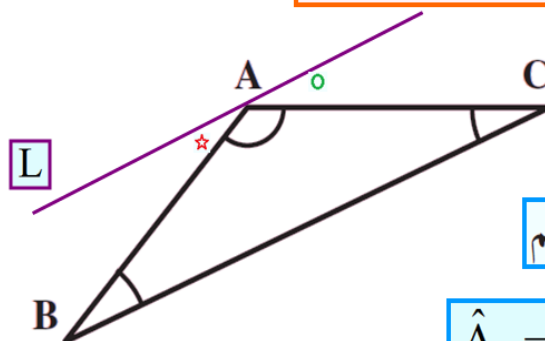
گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$

(اجزای متناظر) (و ض)

قضیه: مجموع زاویه های داخلی مثلث

در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی، 180° است.



از A خطی به موازات BC رسم می کنیم

$\hat{A}_* = \hat{B}$ و خط AB مورب: $L \parallel BC$

$$\hat{A}_O = \hat{C} \text{ و خط } AC \text{ مورب: } L \parallel BC$$

$$\hat{A}_* + \hat{A}_O + \hat{A} = 180^\circ \text{ ولی می دانیم که:}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ پس داریم:}$$

مسئله 1:

ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌ریس اند.

مسئله 2:

نشان دهید سه ارتفاع هر مثلث هم‌ریس اند

مسئله 3:

نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس اند.

قضیه 1:

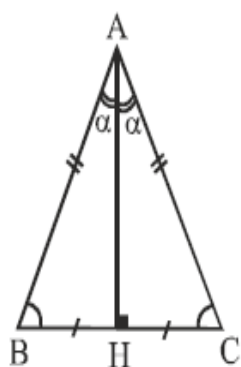
نشان دهید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر است.

مثلث متساوی الساقین: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی الساقین نامیده می شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می نامیم.

1 در مثلث متساوی الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

2 عکس قضیه ی (1) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه های مساوی آن با هم برابرند).

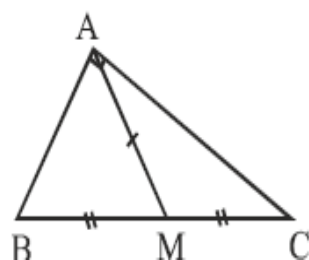
3 در مثلث متساوی الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



4 در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) روابط زیر برقرار است،

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad \text{زاویای مجاور به ساق}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \quad \text{زاویه ی روبه رو به قاعده}$$



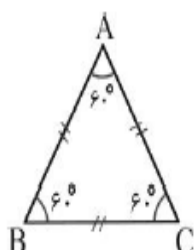
با رسم میانه ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه، دو مثلث متساوی الساقین ایجاد می شود.

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow \text{متساوی الساقین هستند } \triangle MAB \text{ و } \triangle MAC$$

مثلث متساوی الاضلاع

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی الاضلاع نامیده می شود. زاویه های مثلث متساوی الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه ی آن ها 60 درجه است.

همچنین اگر هر سه زاویه ی مثلثی با هم برابر بودند، می توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

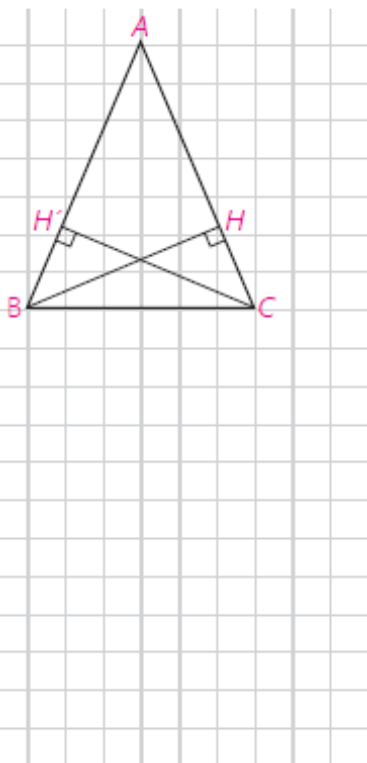
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

تعاریف:



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

توجه:

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

نقیض یک گزاره: همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال:

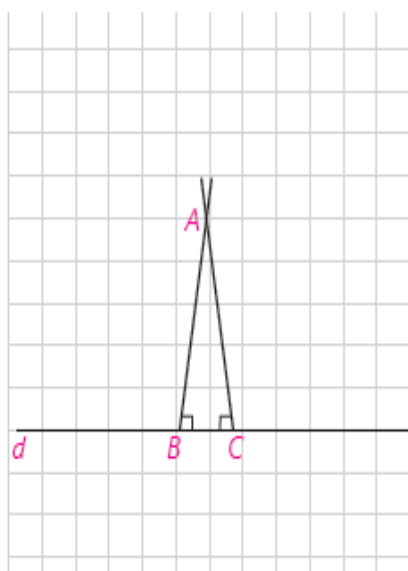
الف) گزاره: « a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن: «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با « a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با « a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»
نقیض آن: «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»
پ) گزاره: «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»
نقیض: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»

برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.
فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.
استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچکتر.

اثبات:

قضیه دوشروطی:

به عبارت $P \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی می‌گویند. P را فرض قضیه و q را حکم آن می‌نامند. در صورتی که

عکس یک قضیه شرطی نیز درست باشد آن قضیه را قضیه دوشروطی می‌نامند.

مثال: الف) قضیه فیثاغورس یک قضیه دوشروطی است.

ب) قضیه تالس در صفحه یک قضیه دوشروطی است.

ج) قضیه تالس در فضا یک قضیه شرطی است و عکس آن درست نیست.

قضیه‌های دوشروطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛

مثال نقض:

مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال: اگر a و b دو عدد اول باشند آنگاه جمع آنها هیچگاه اول نیست. جواب:

$$\left. \begin{matrix} a=2 \\ b=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a+b=5 \quad \text{مثال نقض:}$$

مثال:

مثال های زیر نمونه های از حکم های کلی هستند، برای رد این احکام مثال نقض بیاورید.

(الف) «همه اعداد صحیح، مثبت اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهار ضلعی هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهار ضلعی های محدب)

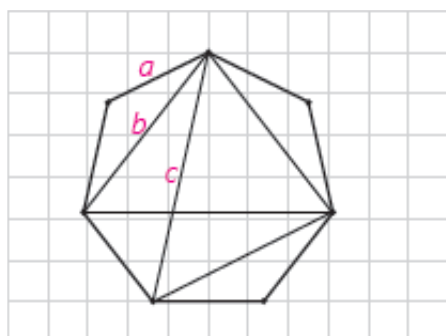
(ت) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی

در مورد تمام اعداد طبیعی)

توجه:

اگر درستی یک حکم کلی را بتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز بتوانیم بیابیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کاردکلاس



۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.



تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) هر لوزی یک مربع است.

(ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

(پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

(ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دشرطی بنویسید.

(الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

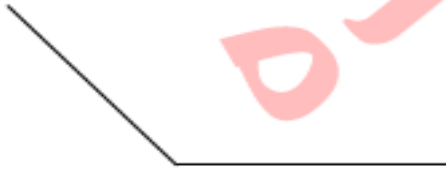
(ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.

(پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

(ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

سوالات امتحانی فصل اول:

۱	عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید. سپس اگر عکس آنها درست باشد آن را به صورت قضیه دو شرطی بنویسید و اگر عکس آن درست نباشد یک مثال نقض بیاورید. (الف) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت های برابرند. (ب) مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است. (ج) اگر سه ضلع مثلث برابر باشند، هر زاویه آن 60° است. (د) هر کس در خواب زندگی می کند در استان خراسان است.
۲	ثابت کنید: مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است.
۳	قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.
۴	قضیه (نامساوی مثلث): در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.
۵	سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی مترند. اندازه پاره خط هایی که نیمساز زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.
۶	قضیه: عمود منصف های ضلع های هر مثلث همسرند.
۷	از مثلث ABC ، اندازه ضلعهای $AB=c$ و $AC=b$ و طول ارتفاع h_a معلوم است. مثلث را رسم کنید.
۸	مکان هندسی مرکز دایره ای که روی یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد را تعیین کنید.
۹	هریک از مفاهیم زیر را تعریف کنید.
	(الف) مکان هندسی (ب) عکس قضیه شرطی (ج) زاویه محاطی (د) چند ضلعی محیطی
۱۰	قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند.
۱۱	دایره ی محاطی مثلث را تعریف کرده، اگر شعاع دایره ی محاطی و p نصف محیط مثلث و s مساحت مثلث باشد. ثابت کنید $s = pr$
۱۲	قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برای نصف کمان مقابل آن است
۱۳	کمان در خور زاویه 30° و روبروی پاره خط $AB=4\text{cm}$ را رسم کنید. و مراحل رسم را توضیح دهید.
	موفق باشید. ولی زاده

برای غلط بودن عبارات مثال نقض بزنید . الف) هر چهار ضلعی که قطر هایش منصف باشند، مستطیل هست. ب) نقطه همرسی عمود منصفهای سه ضلع مثلث همواره داخل مثلث است .	صحیح و غلط بودن عبارات را تعیین کنید . الف) جمله ((درس بخوان!)) یک گزاره نیست . ب) مثلثی با اضلاع ۴ و ۸ و ۲۰ قابل رسم است. ج) از دو نقطه فقط یک خط میتوان رسم کرد. د) استدلال استنتاجی بر اساس واقعیتی که درستی آنرا پذیرفته ایم است. ه) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۱۸۰ درجه است.
متوازی الاضلاعی با قطرهای ۳ و ۴ رسم کنید . چند متوازی الاضلاع میتوان رسم کرد ؟ چرا؟	یک لوزی به طول ضلع ۳ و قطر ۴ سانتی متر رسم کنید .
با استفاده از خط کش و پرگار خطی موازی خط دلخواه L از یک نقطه خارج خط رسم کنید.	الف) با استفاده از پرگار نیمساز زاویه ی زیرارسم را کنید. ب) نقاط روی نیمساز چه خاصیتی دارد ؟ 
به روش غیر مستقیم ثابت کنید : اگر در در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه بزرگتر بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر .	ثابت کنید سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرسند . الف) قضیه ((در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن گاه سه زاویه نیز با هم برابرند)) را بصورت دو شرطی بنویسید. ب) نقیض گزاره ی ((هیچ عدد صحیحی بین ۳ و ۴ وجود ندارد.)) را بنویسید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- ۱- اگر نقطه ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی ————— قرار دارد.
- ۲- یک جمله خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد ، ————— نام دارد .
- ۳- اگر نقطه ای از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد ، آن نقطه روی ————— پاره خط قرار دارد .
- ۴- اگر در یک قضیه ، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می شود ————— گفته می شود .

گزینه درست را انتخاب کنید.

- ۱- نقیض گزاره ی " هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد " کدام است ؟

(الف) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه دارد ☐

(ب) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد ☐

(ج) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه ندارد ☐

(د) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه دارد ☐

۲- کدام جمله ی زیر گزاره است ؟

(الف) کتابت را مطالعه کن ☐

(ب) چه هوای خوبی ! ☐

(ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است . ☐

(د) آیا فردا هوا بارانی است؟ ☐
- ۳- برای کدام حکم کلی زیر مثال نقض وجود دارد ؟

(الف) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است ☐

(ب) هر دو مثلث هم نهشت هم مساحت هستند. ☐

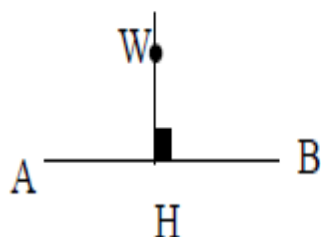
(ج) به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار $n^2 + n + 41$ عددی اول است . ☐

(د) عمود منصف های هر مثلث هم راس اند. ☐

عکس قضیه ی زیر را بنویسید.

" در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند ، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند ."

در شکل مقابل نشان دهید نقطه ی W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است .



تعریف کنید. الف) استدلال استقرایی:	ج) قضیه:
ب) مثال نقض:	
یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ سانتی متر باشند و مراحل کار را رسم کنید.	
ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.	
به کمک استدلال استنتاجی نشان دهید هر سه نیمساز زاویه های داخلی مثلث هم‌رس اند.	
قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند. زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.	
عکس قضیه های زیر را بنویسید. اگر عکس آن نیز درست بود، آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید.	
الف) اگر دو مثلث هم نهشت باشند آنگاه دارای مساحت های برابر هستند.	
ب) اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه اضلاع متناظر شان متناسب هستند.	
با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.	

مفاهیم زیر را تعریف نمایید:

الف) استدلال استنتاجی:

ب) گزاره :

ج) مثال نقض :

د) قضیه اساسی تشابه :

رسم خطی موازی یک خط داده شده از یک نقطه ی خارج آن را با رسم شکل و کلیه مراحل توضیح دهید.

متوازی الاضلاعی رسم نمایید که طول ضلع هایش ۵ و ۶ و طول قطر آن ۸ باشد. (مراحل رسم را توضیح دهید)

ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم راسند. (شکل رسم نمایید)

الف) قضیه نامساوی ها در مثلث را بیان نمایید.

ب) قضیه فوق را اثبات نمایید. (رسم شکل فراموش نشود)

اندازه اضلاع سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ می باشد. اندازه پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه بزرگتر مثلث مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد تعیین کنید.

قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس فرض و حکم آن را تعیین کنید.
در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

سوالات تستی

ردیف	سوالات
1	در کدام یک از اشکال زیر، همواره نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه‌ی تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، برهم منطبق است؟ (۱) مستطیل (۲) لوزی (۳) مثلث (۴) شش‌ضلعی منتظم
2	نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی 70° درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{3}{4}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ (۱) 30° (۲) 40° (۳) 60° (۴) 80°
3	نقطه‌ی M درون مثلث ABC به گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. (۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC (۲) نیم‌ساز رأس A (۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C (۴) نیم‌ساز رأس B
4	عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به وجود می‌آید برابر است با ... (۱) قطری عمود بر AB (۲) وتر موازی و هم‌اندازه با AB (۳) خود وتر AB (۴) قطری موازی با وتر AB

5- مثلث ABC با داشتن مقادیر $b=10$، $c=17$ و $h_a=8$ رسم شده است. مساحت این مثلث کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۶۰ (۴) ۴۸	5
6- نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی 70° درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{3}{4}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ (۱) 30° (۲) 40° (۳) 60° (۴) 80°	6
7- نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. (۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC (۲) نیم‌ساز رأس A (۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C (۴) نیم‌ساز رأس B	7
8- عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ... (۱) قطری عمود بر AB (۲) وتر موازی و هم‌اندازه با AB (۳) خود وتر AB (۴) قطری موازی با وتر AB	8

نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم هستند. دو نقطه‌ی متمایز U و V فاصله‌شان از A برابر

۳ سانتی‌متر و از B برابر x سانتی‌متر است. x در کدام محدوده است؟

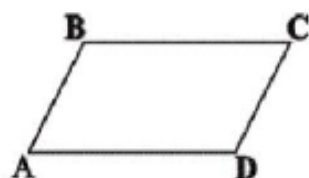
$$x < 1 \quad (2)$$

$$1 < x \quad (1)$$

$$1 < x < 11 \quad (4)$$

$$1 < x < 7 \quad (3)$$

از تقاطع عمود منصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟



(۲) مربع

(۱) مستطیل

(۴) متوازی‌الاضلاع

(۳) لوزی

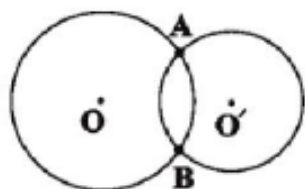
مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و B متقاطع می‌باشند. در این صورت لزوماً:

(۱) OO' از وسط AB می‌گذرد.

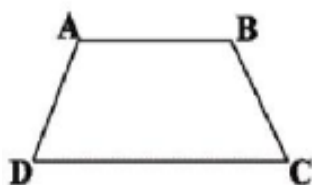
(۲) OO' بر AB عمود است.

$$\angle OAO' = \angle OBO' \quad (3)$$

(۴) هر سه گزینه صحیح است.



در یک دوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و همچنین از قاعده‌ی AD و ساق CD به



یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

(۱) نیم‌سازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$

(۲) عمود منصف‌های دو ساق

(۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها

(۳) عمود منصف CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D

-در مثلث ABC ، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB ، رأس C همواره

روی کدام گزینه قرار دارد؟

(۲) دایره‌ای به قطر AB

(۱) نیم‌دایره‌ای به قطر AB

(۴) دو خط موازی AB

(۳) یک خط موازی AB