

Subject:

Year:

Month:

Date:

هندسه: شامل ای از ریاضیات می باشد که پدیده های اطراف ما را شبیه سازی می کند.

و مفاهیم آن نشود و معلوم می باشد.

مفاهیم هندسه: ۱- تعاریف: مفاهیمی هستند که به وسیله ای اسمی مشخص می شوند.

و پذیرفتن آنها نیاز به دلیل ندارد. ۲- اصول: مفاهیمی هستند که پذیرفتن درستی

آنها نیاز به دلیل ندارد. (بدیهی). ۳- قضایا: مفاهیمی که می باشند که از استدلال

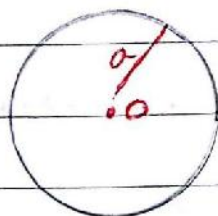
استنتاجی ثابت شده اند.

پار آوری: حالت هم نهشتی در مثلث. (ض ض ض). (ض ض ض). (ض ض ض).

(و ز). (و ض) مفهومی مثلث های قائم زاویه.

درس اول: ترسیم های هندسی و استدلال

۱- نقاطی را نایس کنیم که از نقطه O به فاصله a باشد.



تمامی نقاط روی دایره می رسمیم و شعاع قرار می گیرند.

ALYAZ

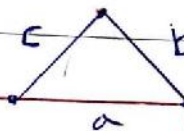
Subject:

Year:

Month:

Date:

۲. روش رسم یک مثلث با طول اضلاع a, b, c را توضیح دهید.

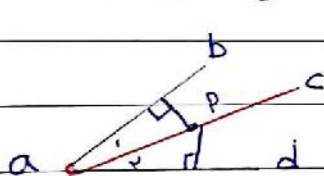


۵. برای کشیدن دو خط دایره‌ای که از یک نقطه به اندازه c و a می‌کشیم و به هم می‌خورند.

۶. برخی خواص لیم ساز و تقسیم آن

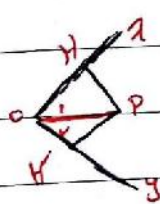
لیم ساز یک زاویه θ یعنی قطعی که از رأس زاویه رسم می‌شود و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

۱. ثابت کنید هر نقطه روی لیم ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



$$\Rightarrow \text{(وز)} \left. \begin{array}{l} \alpha P = \alpha P \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{array} \right\}$$

۲. ثابت کنید نقطه‌ای که فاصل آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی لیم ساز زاویه قرار دارد.



$$\left. \begin{array}{l} PH = PH' \\ OP = OP' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(وض)} \quad \angle PHO = \angle PH'O$$

عمود منصف θ به قطعی که در وسط یک پاره خط بر آن عمود رسم می‌شود.

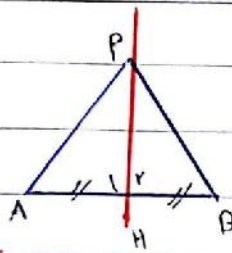
سوال ۵ ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک اندازه است.

Subject:

Year:

Month:

Date:



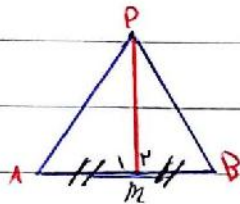
$$PH = PH$$

$$H_1 = H_2$$

$$AB = HB$$

$$\Delta PAH \cong \Delta PBH \text{ (ض ض ض)}$$

سوال 8 ثابت کنید اگر خطی از یک نقطه به دو نقطه دیگر عمود باشد آن نقطه میانی است.



عمود منصف قرار دارد. از P به وسط AB وصل می کنیم.

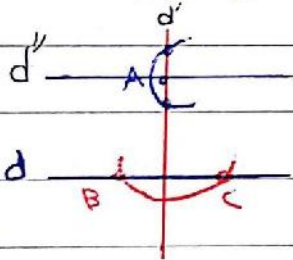
$$PA = PB$$

$$AM = BM$$

$$PM = PM$$

$$\Delta PAM \cong \Delta PBM \text{ (ض ض ض)}$$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید.

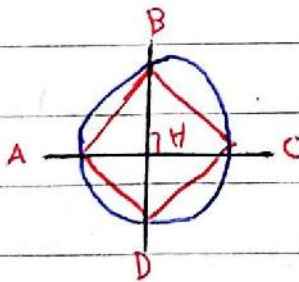


رسم 8 از نقطه ای خط d را عمود بر رسم می کنیم

و سپس در نقطه d' بر d عمود رسم می کنیم و چون

در خط d و d' هر دو بر d عمود هستند پس خودشان موازی اند.

روش رسم مربعی که یک قطر آن داده شده.



رسم 9 قطر AC را رسم می کنیم سپس عمود منصف AC را

رسم می کنیم تا AC را در نقطه H قطع کند به مرکز H و شعاع AH

دایره ای رسم می کنیم و تقاطع دست آمده را به یکدیگر متصل می کنیم.

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

فصل دوم

استدلال

روش های استدلال در هندسه: استقرائی - استنباطی - غیر مستقیم (برهان خلف)

استقرائی: نتیجه گیری کلی بر پایه ی مجموعه ای از مشاهدات و اندازه گیری کردن و تکرار یک

آزمایش را استدلال استقرائی گوئیم. باید عبارت دیگر استقراد یعنی از جز به کل رسیدن.

نتایجی که از این روش به دست می آید کاملاً قابل اعتماد نیست بلکه همراه با حدس و گمان

است.

مثال: نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر مضرب n است.

استدلال: می دانیم در مضرب های مربع که مستطیل کالونی و متوازی الاضلاع و هر دو

زاویه مجاور مکمل هستند و مجموع زاویه آنها 360° می شود. در نتیجه هر n مضرب

مضرب مجموع زاویه هایش 360° است.

توجه: استدلال به کار رفته در مثال بالا استدلال استقرائی است. چون از چند حالت خاص

یک نتیجه کلی گرفته ایم. (از جز به کل رسیدن)

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

استنتاجی: استدلال بر پایه حقایق که درست آنها را قبول کرده ایم. (تعاریف و مفاهیمی که

در هم نهشتی هم استفاده می شود) نتایجی که از این استدلال به دست می آید کاملاً درست و

قابل اعتماد هستند.

قضیه: مفاهیم کلی هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند و از آنها در حل مسائل دیگر

استفاده می شوند.

قضية شرطی: به قضیه ای که به صورت جمله شرطی بیان می شود قضیه شرطی گوئیم. به جمله ای

که بعد از آن قراری گیر فرض و به جمله بعد از آن آنگاه حکم گفته می شود. $P \Rightarrow Q$

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی P و Q را عوض کنیم به عبارت شرطی حاصل

عکس قضیه گفته می شود و ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های برابر به ساق ها مساوی اند

(الف) به صورت شرطی بیان کنید. (ب) عکس قضیه را بنویسید.

(الف) اگر مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های برابر به ساق ها با هم برابر اند.

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

ب) اگر در مثلث دو زاویه باهم برابر باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین می باشد.

قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد به آن قضیه ^{عکس} و آن قضیه ^{عکس} در شرطی و

به صورت $P \Rightarrow Q$ نام گذاری می شود.

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه در شرطی بیان کنید.

حل: قضیه در شرطی: یک مثلث قائم الزامی است، اگر و تنها اگر توان دوم یک ضلع برابر مجموع

توان دوم های دو ضلع دیگر باشد.

رفت: اگر مثلث قائم الزامی باشد آنگاه توان دوم یک ضلع برابر مجموع توان دوم دو ضلع دیگر.

برگشت: اگر در یک مثلث توان یک ضلع برابر مجموع توان دوم های دو ضلع دیگر باشد آنگاه

آن مثلث قائم الزامی است.

نوبه: برای اثبات یک قضیه در شرطی هم رفت قضیه و هم برگشت آن را حساب کنیم.

خط ها: هر سه به خط که فقط در یک نقطه هم تیر را قطع می کنند. و به آن نقطه

نقطه همبستگی گفته می شود.

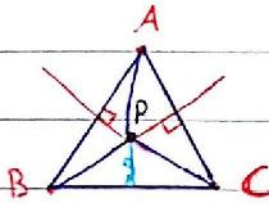
Subject:

Year:

Month:

Date:

قضیه ۱ در هر مثلث ممود منصف داخلی سه ضلع هم‌رس اند.
ممود منصف‌ها هم‌رس اند: حکم: $\triangle ABC$ یک مثلث است فرض



استدلال: ممود منصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون AB و AC تقاطع‌اند پس ممود منصف‌های آن‌ها هم در تقاطع می‌باشند و در P هم‌دیگر را

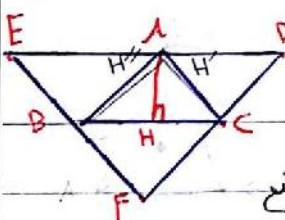
قطع می‌کنند. پس از P به C , A , B وصل می‌کنیم. P هم‌رس هستند.

قرار دارد یعنی سه ممود منصف در نقطه

P روی ممود منصف AB است پس $PA = PB$

$$PB = PC$$

P روی ممود منصف AC است پس $PA = PC$



قضیه ۲ سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس اند. ارتفاع‌ها هم‌رس اند: حکم
 $\triangle ABC$ مثلث است فرض

اثبات: از رأس‌های مثلث ABC سه خط موازی اضلاع ABC رسم می‌کنیم

اضلاع موازی
 $AP \parallel BC$
 $AB \parallel PC$
 $\Rightarrow ABCD$ چهارضعی $\Rightarrow BC = AD$

موازی اضلاع
 $AE \parallel BC$
 $AC \parallel BE$
 $\Rightarrow AEBC$ چهارضعی $\Rightarrow BC = AE$

$$\Rightarrow AD = AE$$

تقاطع DEF به وجود آید.

از طرفی $EP \parallel BC$ است و AH ممود بر BC می‌باشد پس ED ممود است در نتیجه AH ممود منصف

ضلع ED می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد BH' ممود منصف EF و CH'' ممود منصف

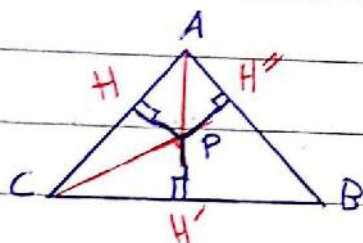
ALYAZ

Subject:

Year: _____ Month: _____ Date: _____

DF است یعنی ارتفاع های مثلث ABC روی محو منصف های مثلث DEF باشد چون

محو منصف ها هر سه از یک نقطه ارتفاع های ABC نیز می رسند



قضیه ۳) در هر مثلث سه نیم سازه زاویه های داخلی هم رسند

ABC مثلث است فرض

سه نیم سازه زاویه های داخلی هم رسند و هم

اثبات و نیم سازه در زاویه A و C را رسم می کنیم این دو نیم سازه در نقطه P همدیگر را قطع می کنند

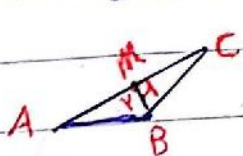
P روی نیم سازه A است و $PH = PH''$

بسیار از نقطه P به ضلع محو می کنند

P روی نیم سازه C است و $PH = PH'$

در نتیجه به نیم سازه در نقطه P هم رسند $\Rightarrow$ P روی نیم سازه B قرار دارد $\Rightarrow PH' = PH'' \Rightarrow 1 و 2$

قضیه ۴) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد آنگاه زاویه روبه روبه ضلع بزرگتر بزرگتر است از



$AC > BC$ فرض

$\hat{B} > \hat{A}$ حکم

زاویه روبه روبه ضلع کوچکتر

اثبات و روی ضلع AC پاره خط CM را طوری جدا کنیم که $CM = CB$ باشد و سپس از مرکز B

مضرب می کنیم

$\hat{M}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1$ متساوی الساقین $CM = CB$

می دانیم در هر مثلث اندازه ی هر زاویه خارجی از هر کدام از زاویه های داخلی غیر مجاور بزرگتر است

یعنی

$\hat{M}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$

$\hat{B}_1 > \hat{B} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$ چون B بیرونی از A است

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

گزاره ۸ به هر صدی فرضی که دقیقاً درست یا نادرست باشد در آن کوئیم. ممکن است ما از درست

بودن یا نادرست بودن آن جمله اطلاع نداشته باشیم. مثال گزاره $7 > 3$

توجه! اگر یک گزاره از یک جمله‌ی فرضی درست شده باشد به آن گزاره ساده کوئیم و اگر ترکیبی از
مکعب $\frac{1}{3}$ عددی اول $\frac{1}{3}$ باشد $\frac{1}{3}$ است.
چند گزاره ساده باشد به آن گزاره مرکب کوئیم. مثال ۸ داده اعدادی زوج است.

نقیض یک گزاره به عبارتی که ارزش آن در قیاساً مخالف ارزش یک گزاره باشد دقیقاً آن گزاره

کوئیم. مثال ۸ عددی زوج است. این چنین نیست که عددی زوج است.

توجه! در صورت نوشتن هر گزاره با استفاده از یک مثال نقض می‌توان نقض را نوشت.

برهان خلف ۸ در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و نقیض آن درست می‌باشد و

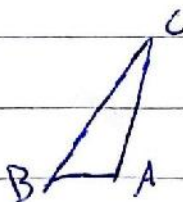
سپس از استنباطی یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیر ممکن می‌رسیم که این

نشانه دهنده این است که فلاف حکم نادرست است (یعنی حکم درست است).

نقیده! اگر در مثلثی دو زاویه نامبر باشد آنگاه ضلع روبرو به آن بزرگتر از ضلع روبرو به آن کوچکتر.

فرض $\hat{A} > \hat{B}$

حکم $BC > AC$



ضلع روبرو به زاویه کوچکتر.

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

اثبات ۵: فرض کنیم $BC < AC$ یا $BC = AC$ یعنی $BC \nless AC$ است.

اگر $BC = AC$ باشد $\triangle ABC$ متساوی الساقین است یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و این فرضی است.

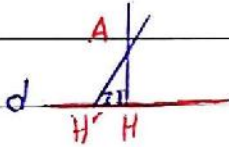
اگر $BC < AC$ باشد بنا به قضیه ۴ $\hat{A} < \hat{B}$ و این فرضی خلاف است.

یعنی فرضی خلاف نادرست است در نتیجه حکم $BC > AC$ درست می باشد.

$AC > BC$

درست

سوال ۶: از هر هان خلف تا بک کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط می توان بیش از یک خط



خط l و نقطه A خارج آن ۵ فرضی

بر آن عمود کردیم از A فقط یک عمود می کشیم و فقط یک نقطه

اثبات ۶: فرض کنیم از نقطه A در خود بر l رسم می شود. (فرضی خلاف) در این حالت $AH'H$

یک مثلث قائم الزامی بود که مجزئ منافی های داخلی آن از 180° درجه بیشتر است و این غیر ممکن است پس از نقطه A فقط یک خط می توان عمود رسم کرد.

مثال نقض ۶: به مثالی که کلیت درستی حکم را رد می کند.

مثال ۷: درستی یا نادرستی افکار زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی مثال نقض را

مشخص کنید. (الف) همی اعداد صحیح مثبت می باشند. غلط $\leftarrow 2, 3, 4, \dots$

(ب) برای هر عدد طبیعی n عبارت $2^n + 1$ اول است. غلط $\leftarrow 2^3 + 1 = 9$ $n=3$

ALYAZ