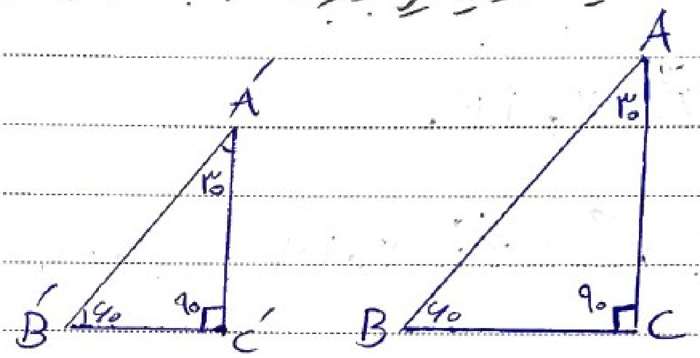
شرط تشابه: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد آن دو مثلث متشابه هستند.

نکته: در مثلث های قائم الزاویه با توجه به اینکه یک زاویه قائمه (۹۰°) وجود دارد پس چنانچه فقط یک زاویه دیگر برابر داشته باشند آن دو مثلث متشابه میباشند

$A = A'$
$B = B'$
$C = C'$

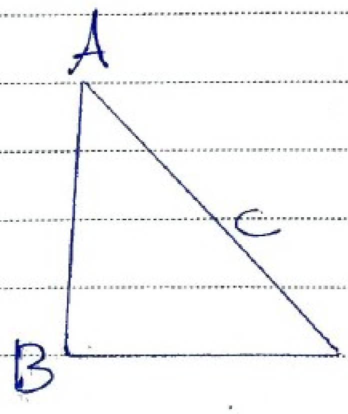


نکته: زمانی که دو مثلث باهم دیگر متشابه هستند نسبت اضلاع آنها با یکدیگر برابر میباشد.

یعنی: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ مثلاً تمامی اضلاع در مثلث اول باید سه برابر اضلاع در مثلث دوم باشد. (در این صورت نسبت تشابه دو مثلث ۳ میباشد)

رابطه فیثاغورس:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

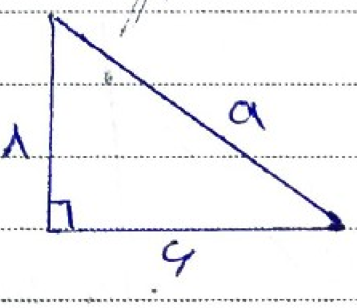


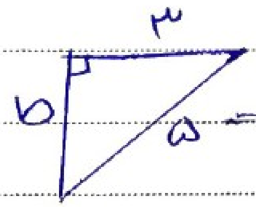
$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

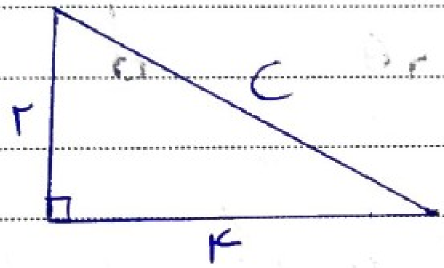
مثال: ضلع سوم را در مثلث زیر بدست آورید.

$$a=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{\underbrace{36+64}_{100}}=10$$



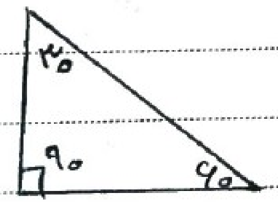


$$\Longrightarrow b=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{\underbrace{25-9}_{16}}=4$$



$$c=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$$

یادآوری: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° می باشد. در مثلث های قائم الزاویه مجموع دو زاویه غیر قائمه باید 90° شود. مثلا اگر یک زاویه 30° باشد زاویه دیگر می‌شود $90-30=60$



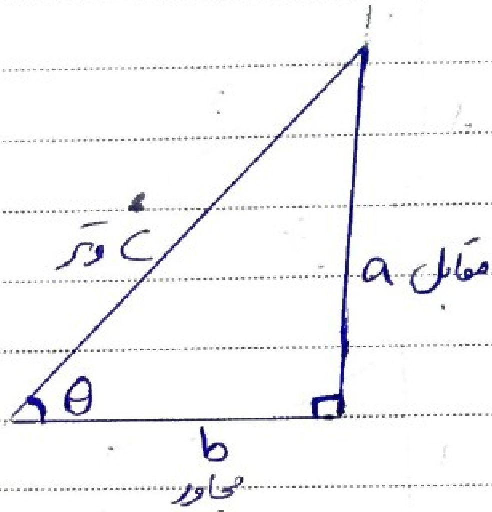
نسبت های مثلثاتی: در یک مثلث قائم الزاویه نسبت های سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت نسبت های مثلثاتی میگویند و به صورت زیر نشان میدهند.

سینوس $\sin\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{a}{c}$

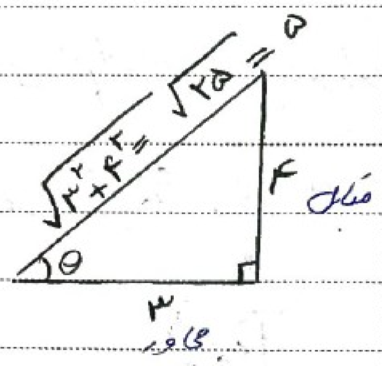
کسینوس $\cos\theta = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{b}{c}$

تانژانت $\tan\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{a}{b}$

کتانژانت $\cot\theta = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \dfrac{b}{a}$



مثال: با توجه به شکل مقابل تمامی نسبت های مثلثاتی زاویه ی θ تتا را بدست آورید.



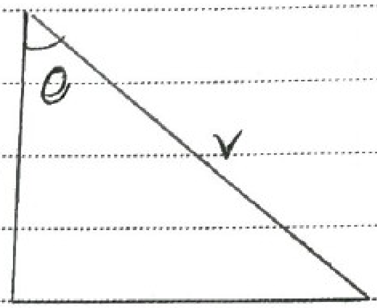
$\sin\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{۴}{۵}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{۳}{۵}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{۴}{۳}$

$\cot\theta = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \dfrac{۳}{۴}$

مثال: نسبت های مثلثاتی را بنویسید.



$x=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$

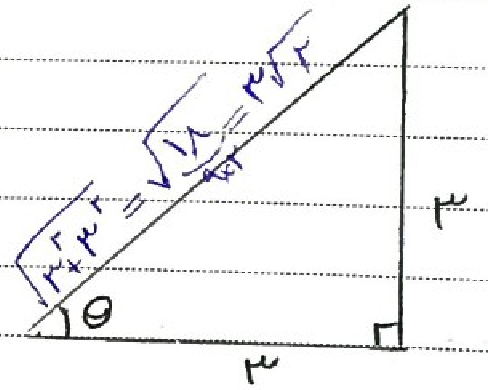
$\sin\theta=\frac{\sqrt{40}}{7}$

$\cos\theta=\frac{3}{7}$

$\tan\theta=\frac{\sqrt{40}}{3}$

$\cot\theta=\frac{3}{\sqrt{40}}$

مثال:



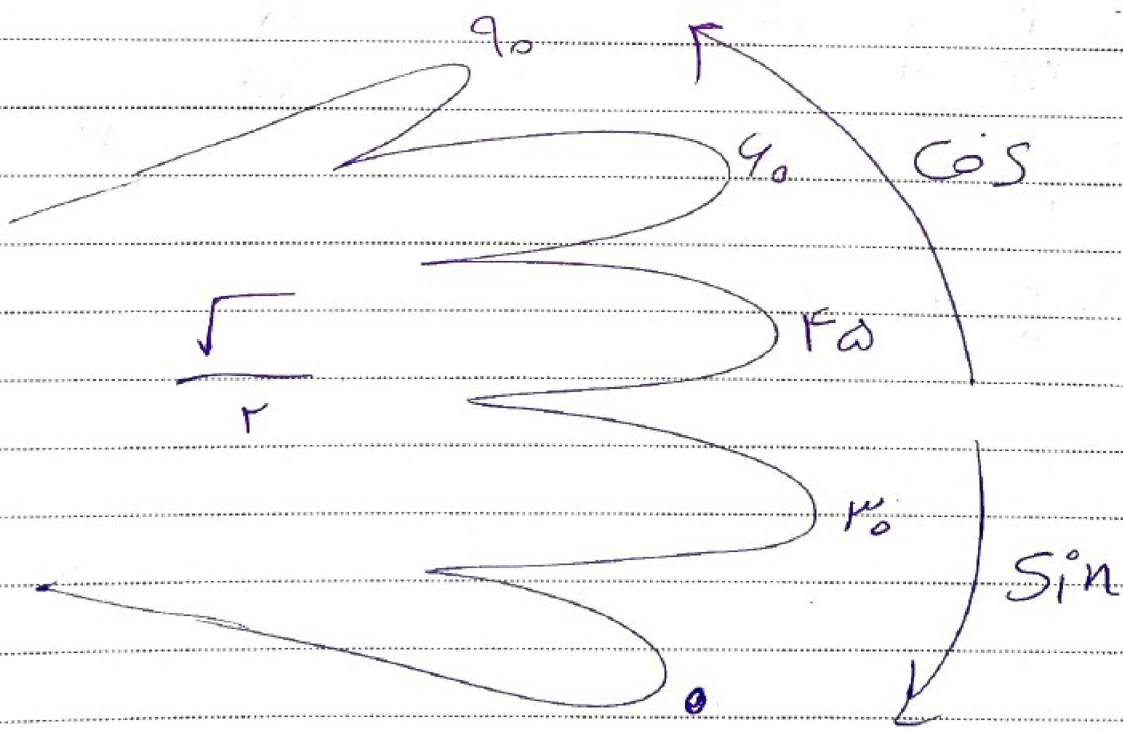
$\sin\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

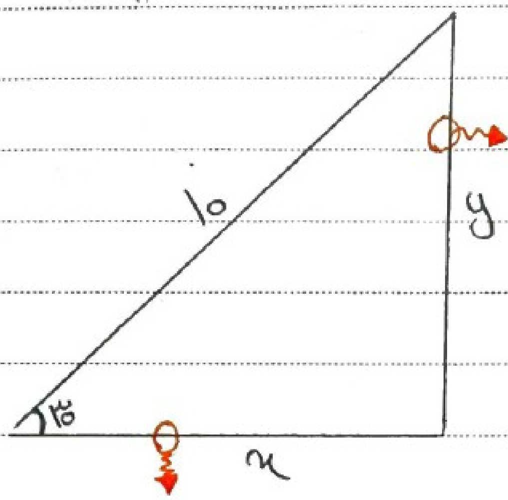
$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\theta=\frac{3}{3}=1$

$\cot\theta=\frac{3}{3}=1$

	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده ∞
cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰





$\sin 30 = \frac{y}{10}$

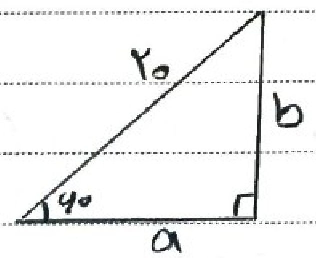
$\frac{1}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\cos 30 = \frac{x}{10}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

زمانی که در یک مثلث قائم الزاویه وتر و یک زاویه را به ما داده باشند برای اینکه بتوانیم ضلع مجاور را بدست آوریم از رابطه $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ استفاده میکنیم ولی اگر ضلع مقابل را بخواهند از رابطه $\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ استفاده میکنیم

در مثلث زیر طول اضلاع a و b را بدست آورید.



$\sin 60 = \frac{b}{20}$ $\quad b = 10\sqrt{3}$

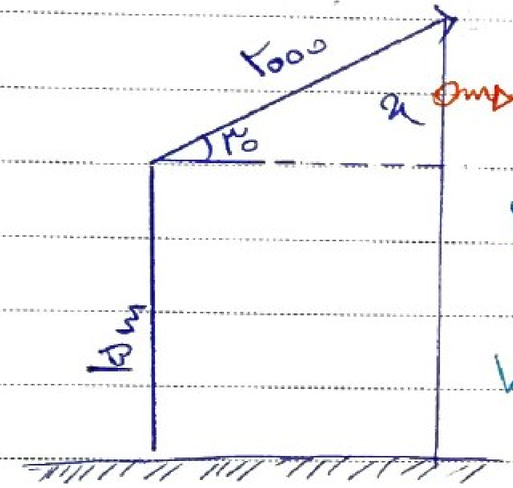
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{20} \longrightarrow b = \frac{20\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60 = \frac{a}{20}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{20} \longrightarrow a = \frac{20}{2} = 10$

سوال: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین رسیده است؟

۵



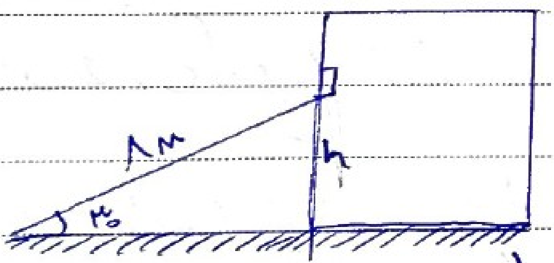
$\sin 30 = \frac{x}{2000} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2000} \rightarrow x = 1000$

$h = ?$

$h = 1000 + 15 = 1015\,m$

سوال: مطابق شکل نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین ۳۰° باشد

۸



الف) ارتفاع پنجره تا زمین را حساب کنید.

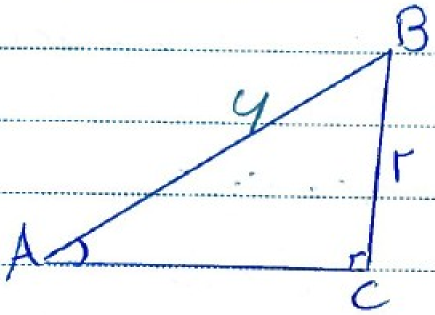
الف) $\sin 30 = \frac{h}{8} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{8} \rightarrow h = 4m$

ب) فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر می‌باشد؟

ب) $\cos 30 = \frac{x}{8} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 4\sqrt{3}\ m$

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: ....( )

مثال: در شکل زیر مقدار یکی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده و طول یکی از ضلع های مثلث داده شده است طول سایر اضلاع را حساب کنید.

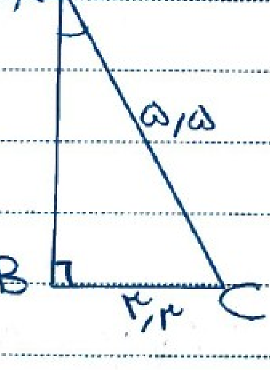


$\sin A = \frac{۱}{۳}$ $\qquad AC = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = \sqrt{۳۶ - ۴} = \sqrt{۳۲}$

$\sin A = \frac{BC}{AB}$

$\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{AB} \longrightarrow AB = ۶$

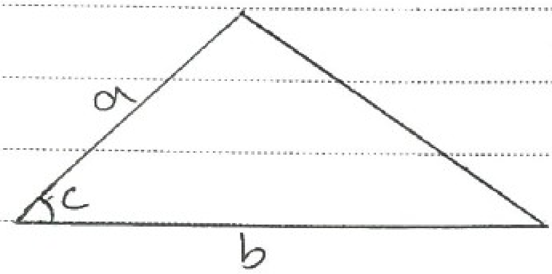
مثال: نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.



$\sin\theta = \frac{۳٫۳}{۵٫۵} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad \tan\theta = \frac{۳٫۳}{۴٫۴}$

$\cos\theta = \frac{۴٫۴}{۵٫۵} = \frac{۴}{۵}$ $\qquad \cot\theta = \frac{۴٫۴}{۳٫۳}$

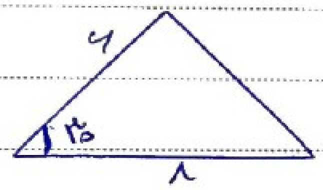
نکته: اگر در هر مثلث دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع را بدانیم می‌توانیم مساحت مثلث را از طریق رابطه زیر بدست آوریم.



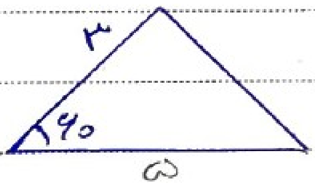
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}\, a \times b \times \underbrace{\sin C}_{\text{سینوس زاویه بین دو ضلع}}$$

مثال: مساحت هر یک از مثلثات زیر را بدست آورید.

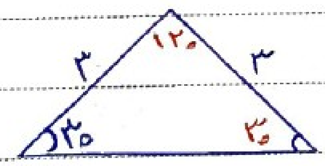
(الف)



$$S = \frac{1}{2} \times \cancel{6}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times \cancel{\sin 30}^{\frac{1}{2}} = 12$$

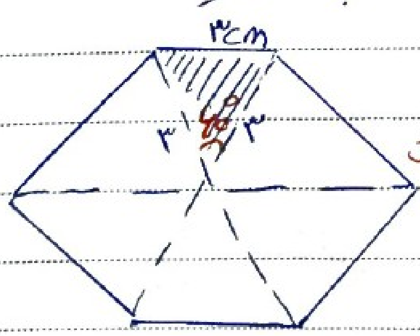


$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \cancel{\sin 60}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

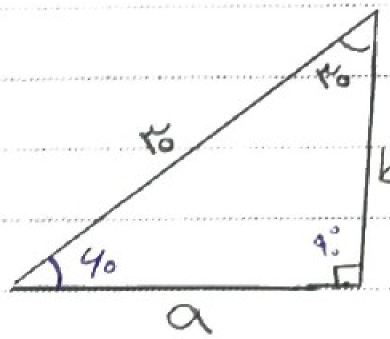


$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{\sin 120}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

مساحت ۶ ضلعی منتظم را که در آن ضلع برابر ۳ سانتی متر میباشد بدست آورید.



$$S_{\text{شش ضلعی}}^{\text{مثلث}} = \cancel{6}^{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{\sin 60}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



مثال: در مثلث زیر طول a و b را بدست آورید.

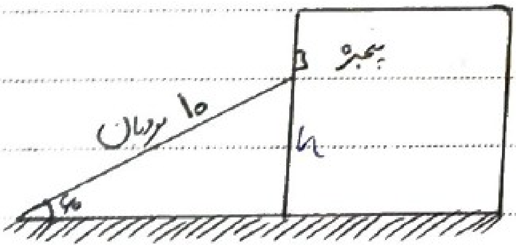
اندازه زاویه: $۳۰+۹۰=۱۲۰$ ، $۱۸۰-۱۲۰=۶۰$

$\sin ۶۰ = \frac{b}{۳۰}$ $\qquad b=۱۵\sqrt{۳}$

$\cos ۶۰ = \frac{a}{۳۰}$ $\qquad \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{b}{۳۰} \longrightarrow b=\frac{\cancel{۳۰}\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}=۱۵\sqrt{۳}$

$\frac{۱}{۲}=\frac{a}{۳۰} \longrightarrow a=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$

مطابق شکل نردبانی به طول ۱۰ متر در زیر پنجره‌ای قرار دارد. اگر زاویه نردبان با سطح زمین ۶۰° باشد آنگاه:



- فاصله پای پنجره تا زمین چقدر می‌باشد؟

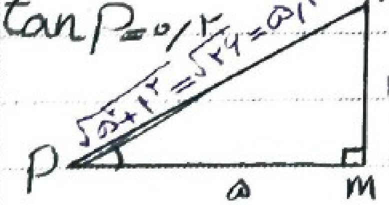
الف) $\sin ۶۰=\frac{h}{۱۰} \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{h}{۱۰} \longrightarrow h=\frac{\cancel{۱۰}\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}=۵\sqrt{۳}$

- فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر می‌باشد؟

ب) $\cos ۶۰=\frac{x}{۱۰} \longrightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{۱۰} \longrightarrow x=\frac{\cancel{۱۰}}{\cancel{۲}}=۵m$

مثال: در مثلث زیر تعدادی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه داده و طول یکی از اضلاع های مثلث داده شده است. طول سایر اضلاع را حساب کنید.

$\tan P=۰/۲$



$\sqrt{۵^۲+۱^۲}=\sqrt{۲۶}=۵/۱$

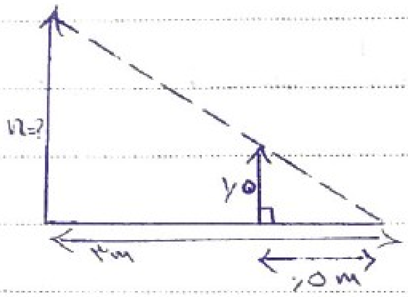
$\sin P=\frac{۱}{۵/۱}$

$\cos P=\frac{۵}{۵/۱}$ $\qquad \cot=\frac{۵}{۱}=۵$

$\frac{MN}{MP}=۰/۲ \longrightarrow \frac{MN}{۵}=۰/۲ \longrightarrow MN=۵\times ۰/۲=۱$

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

ص۲۴ تمرین ۱ :



$h=\frac{3\times 1.5}{0.5}=9m$

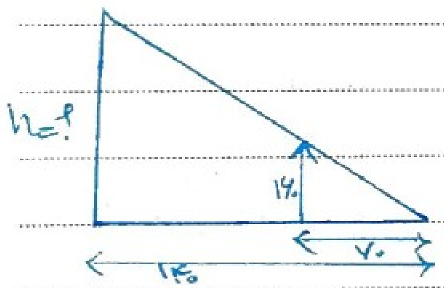
$\frac{1.5}{h}=\frac{0.5}{3}\rightarrow 0.5h=3\times 1.5$

روی سوال (کتاب ریاضی)

طول سایه تیر برق = ۳ متر
قد نسرین = ۱/۵ متر
طول سایه نسرین = ۰/۵ متر
ارتفاع تیر برق = ؟

ص۴۰ سوال ۱۱۹ قلم چی :

قد علی ۱۶۰ سانتی متر است. روز قبل او در خیابان سایه خود را اندازه گرفت. در آن موقع سایه او ۷۰ cm و سایه یکی از درخت های کنار خیابان ۱۴۰ cm بوده. طول آن درخت چند سانتی متر بوده؟



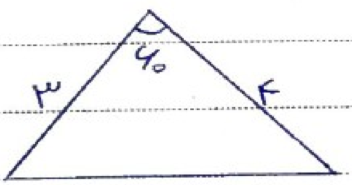
$\frac{160}{h}=\frac{70}{140}\Rightarrow\frac{160}{h}=\frac{1}{2}\rightarrow h=2\times 160=320\,cm$

ارتفاع درخت

$h=\frac{140\times 160}{70}=320\,cm$

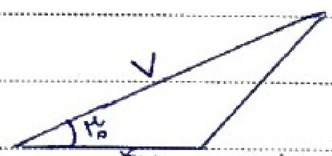
تمرین ص۴۸ سوال ۱۳۸ قلم چی :

الف)



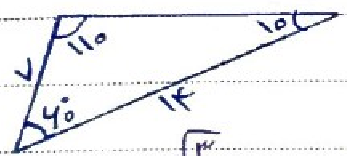
$S=\frac{1}{2}\times 4\times 3\times \sin 60=2\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

ب)



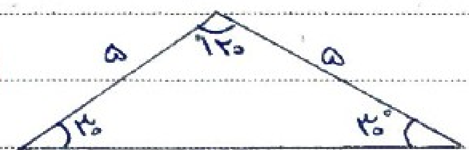
$S=\frac{1}{2}\times 7\times 4.5\times \sin 30=\frac{31.5}{4}$ ($\sin 30=\frac{1}{2}$)

پ)

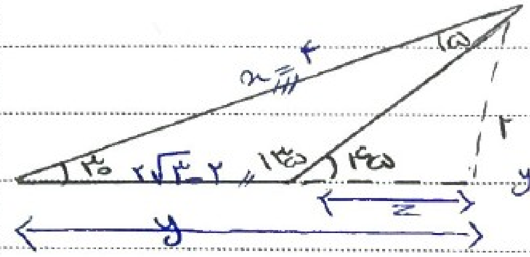


$S=\frac{1}{2}\times 7\times 14\times \sin 60=\frac{49\sqrt{3}}{2}$ ($\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$)

ت)



$S=\frac{1}{2}\times 5\times 5\times \sin 120=\frac{25\sqrt{3}}{4}$ ($\sin 120=\frac{\sqrt{3}}{2}$)



ت) $\sin 30 = \frac{2}{x} \to \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \to x = 4$

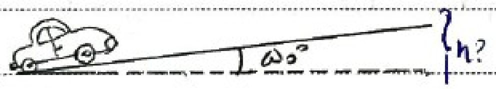
y = پایش y = $y = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{\underset{3\times4}{12}} = 2\sqrt{3}$

z پایش = $\tan 45 = \frac{2}{z} \to 1 = \frac{2}{z} \to z = 2$ ✓

ضلع نظیر $= y - z = 2\sqrt{3} - 2$

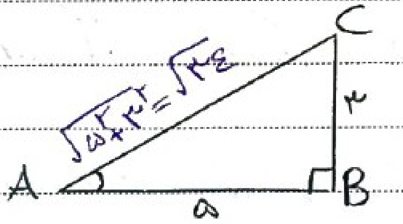
$S = \frac{1}{2} \times \cancel{4}^{2} \times (2\sqrt{3} - 2) \times \cancel{\sin 30}^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} - 2$ ⟸ جواب پایانی

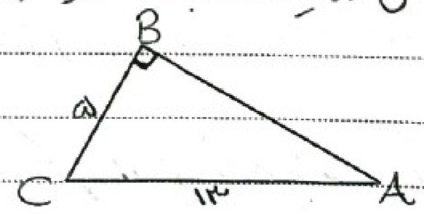
مثال: علی در یک جاده‌ی صاف در حال حرکت است و سپس وارد قسمتی از جاده می‌شود که شیب ۵° نسبت به افق دارد. اختلاف ارتفاع جایی که علی پس از طی یک کیلومتر روی سطح شیب‌دار به آن می‌رسد، با نقطه‌ای که شیب جاده شروع می‌شود تقریبا چقدر است؟ ($\sin 5° \simeq 0/087$)



$\sin = \frac{h}{1} = 0/087 \Rightarrow h = 1 \times 0/087 = 0/087$ Km

ـ نسبت‌های مثلثاتی زاویه A را بدست آورید. علم چی صفحه ۴ سوال ۱۲





$\sin\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

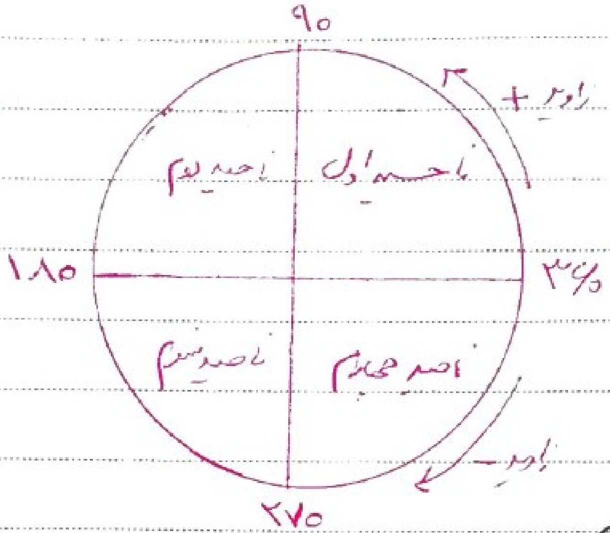
$\tan\theta = \frac{3}{5}$

$\cot\theta = \frac{5}{3}$

$\sin\theta = \frac{CB}{CA} = \frac{5}{13}$ $\qquad \tan\theta = \frac{CB}{BA} = \frac{5}{12}$

$\cos\theta = \frac{BA}{CA} = \frac{12}{13}$ $\qquad \cot\theta = \frac{BA}{CB} = \frac{12}{5}$

ناحیه مثلثاتی:



اگر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت یک درجه می‌گویند.

ناحیه اول: از ۰ تا ۹۰° را ناحیه اول گویند

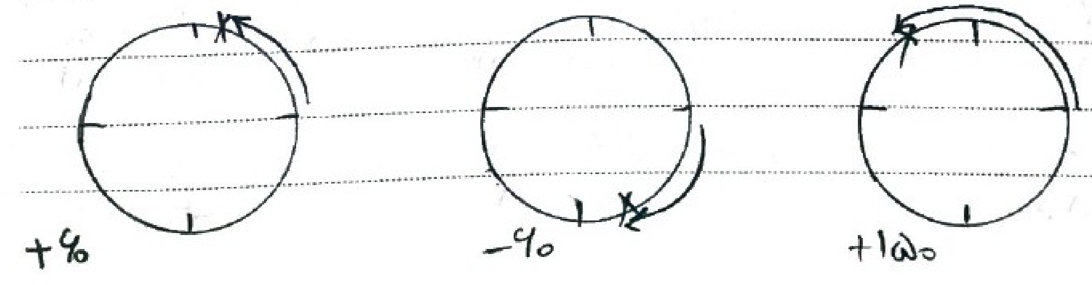
ناحیه دوم: از ۹۰ تا ۱۸۰° را ناحیه دوم گویند

ناحیه سوم: از ۱۸۰° تا ۲۷۰ را ناحیه سوم گویند

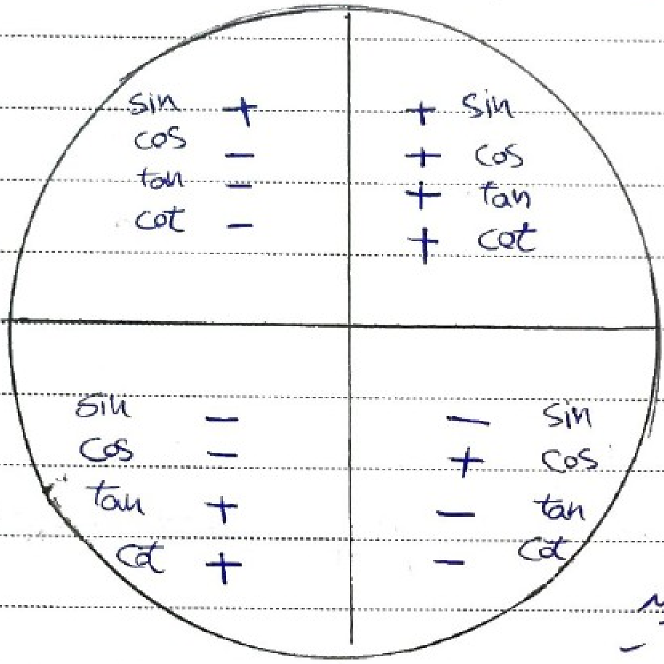
ناحیه چهارم: از ۲۷۰° تا ۳۶۰ را ناحیه چهارم می‌گویند.

نکته: زوایای ۰، ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰ و ۳۶۰ زوایای مرزی بوده و جزو هیچکدام از ناحیه ها محسوب نمی‌شوند.

نکته: اگر جهت حرکت به صورت پادساعتگرد باشد (خلاف جهت ساعت) باشد زاویه را مثبت می‌گوییم ولی اگر جهت حرکت به صورت ساعتگرد باشد زاویه را منفی می‌گوییم



علامت نسبت های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (در چهار ناحیه مختلف)



sin
cos
tan
cot

برای اینکه بتوانیم علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی را برای یک زاویه خاص مشخص کنیم ابتدا مشخص میکنیم که آن زاویه در کدام ناحیه قرار دارد سپس بررسی میکنیم که نسبت های مثلثاتی در آن ناحیه دارای چه علامتی هستند. مثلا: $\alpha = 200°$ در ناحیه سوم قرار دارد که در این ناحیه سینوس و کسینوس − و تانژانت و کتانژانت + هستند.

$\theta = 300°$ در ناحیه چهارم، کسینوس + و سینوس و مابقی −

ص ۴۱ سوال ۴

حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید

یعنی مشخص کنید که در کدام ناحیه قرار دارد

الف) $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$

$\sin > 0 \longrightarrow$ ۱ و ۲
$\cos > 0 \longrightarrow$ ۱ و ۴
اشتراک $\longrightarrow$ ناحیه ۱

ب) $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta > 0$

$\sin < 0 \longrightarrow$ ۳ و ۴
$\cos > 0 \longrightarrow$ ۱ و ۴
اشتراک $\longrightarrow$ در ناحیه ۴

صـ ۴۱ سوال ۵:

ج) $\sin\theta \times \cos\theta < 0$

جواب: تتا در ناحیه ۲ یا ۴ قرار دارد

$\underbrace{\sin\theta < 0}_{۳ \text{ و } ۴}$ و $\underbrace{\cos\theta > 0}_{۱ \text{ و } ۴}$ $\longrightarrow$ ۴

$\underbrace{\sin\theta > 0}_{۱ \text{ و } ۲}$ و $\underbrace{\cos\theta < 0}_{۲ \text{ و } ۳}$ $\longrightarrow$ ۲

صـ ۴۱ سوال ۳:

اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

$\underbrace{\sin\theta > 0}_{۱ \text{ و } ۲}$ و $\underbrace{\tan\theta > 0}_{۱ \text{ و } ۳}$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ ۱

θ در ناحیه ۱ و ۴ قرار دارد

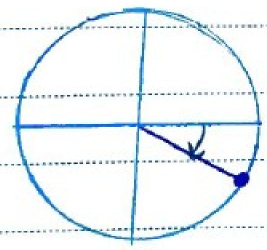
یا

$\underbrace{\sin\theta < 0}_{۳ \text{ و } ۴}$ و $\underbrace{\tan\theta < 0}_{۲ \text{ و } ۴}$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ ۴

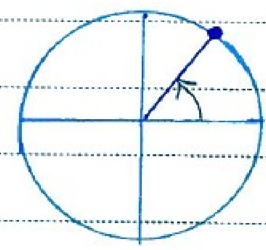
صـ ۳۷ سوال ۱:

مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار دارد؟

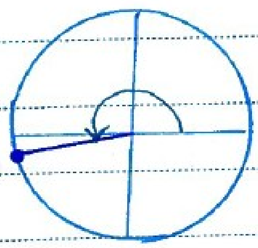
الف) -30°



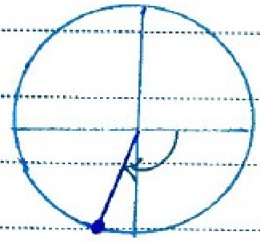
ب) 65°



پ) 182°



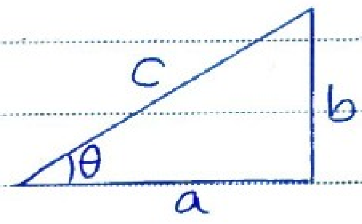
ت) -95°



مقدار	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن ∞	۰	ت ن ∞	۰
cot	تعریف نشده ∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت ن ∞	۰	ت ن ∞

یافتن سایر نسبت های مثلثاتی با توجه به ناحیه و نسبت مثلثاتی داده شده:

یادآوری:



$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ سینوس

$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ کسینوس

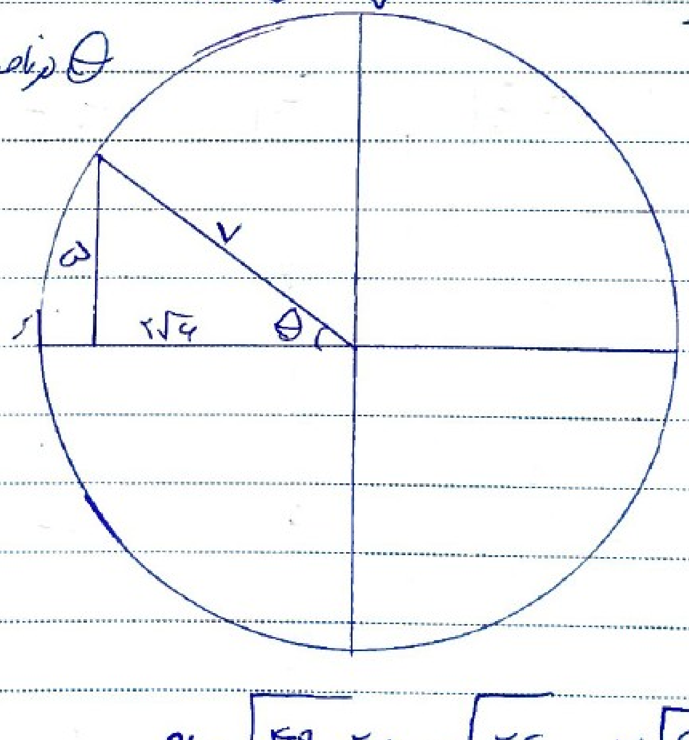
$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ تانژانت

$\cot\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$ کتانژانت

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$

مثال: اگر θ در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{5}{7}$ باشد، سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.

$\sin\theta = \frac{5}{7}$



$\cos\theta = \frac{-2\sqrt{6}}{7}$ θ در ناحیه دوم است.

$\tan\theta = \frac{-5}{2\sqrt{6}}$

$\cot\theta = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$

$\sin\theta = \frac{5}{7}$

$x = \sqrt{49-25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

نمودار و شیب خط: معادله یک نمودار خطی به صورت $y=mx+b$ میباشد که در آن به m (شیب خط، ضریب زاویه) و به b عرض از مبدأ میگویند. برای اینکه بتوانیم یک نمودار را رسم کنیم باید معادله‌ی آن را داشته باشیم. برای بدست آوردن شیب خط میتوان از نسبت های مثلثاتی نیز استفاده نمود.

$$y = \underbrace{m}_{\text{شیب}}x + b$$

برای نوشتن معادله خط به یک نقطه و یک شیب نیاز داریم.

شیب خط = $\tan\theta$ ← زاویه نمودار با محور xها

شیب خط = $\dfrac{\text{تفاضل } y \text{ ها}}{\text{تفاضل } x \text{ ها}}$

مثال:

1) در معادلات خط زیر شیب و عرض از مبدأ را مشخص کنید.

الف) $2y-3x=5$

$2y=3x+5 \rightarrow y=\dfrac{3x+5}{2}=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$

ب) $x+y=2$

$y=-x+2$

شیب $\tan\alpha=-1$

عرض از مبدا $=2$

برای اینکه بتوانیم شیب و عرض از مبدأ را بدست آوریم ابتدا معادله را به فرم استاندارد $y=mx+b$ تبدیل میکنیم. آن عددی که کنار x قرار دارد شیب و آن عدد دیگر عرض از مبدأ میگوییم.

نکته: برای نوشتن معادله ی خط ما یک شیب و یک نقطه نیاز داریم تا آنها را در رابطه $y=mx+b$ قرار دهیم. به دو طریق میتوان شیب را بدست آورد.

۱: زمانی که زاویه با محور افق را به ما داده باشند: $m=\tan\alpha$ شیب

۲: زمانی که دو نقطه از خط را داشتیم: $m=\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

صفحه ۴ سوال ۲ کار در کلاس:

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها 30° است و از نقطه $(1,0)$ میگذرد.

زاویه را داده است $\Longleftarrow m=\tan\alpha=\tan 30=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad y=mx+b$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$

جاگذاری نقطه $(1,0)$ برای یافتن b: $0=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1+b \Longrightarrow b=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

معادله خطی را بنویسید که زاویه ی آن با محور x ها 45° درجه است و نقطه $(0,2)$ روی آن قرار دارد.

$y=mx+b$

زاویه را داده $\Longleftarrow m=\tan\alpha=\tan 45=1$

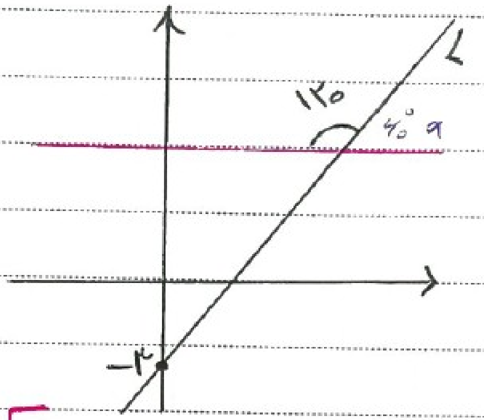
$y=1x+b \xrightarrow[\text{نقطه }(0,2)]{\text{جاگذاری}} 2=1\times 0+b \longrightarrow b=2$

$y=1x+2 \rightarrow y=x+2$

نکته: در سوالاتی که شیب و یک نقطه داده شد می‌توان از فرمول‌های زیر برای بدست آوردن معادله‌ی خط استفاده نمود ص ۴۱ سوال ۸

$y = mx + b$

$\underset{\text{شیب}}{y - y_1 = m(x - x_1)}$



$\alpha = 60^\circ \longrightarrow m = \tan 60 = \sqrt{3}$

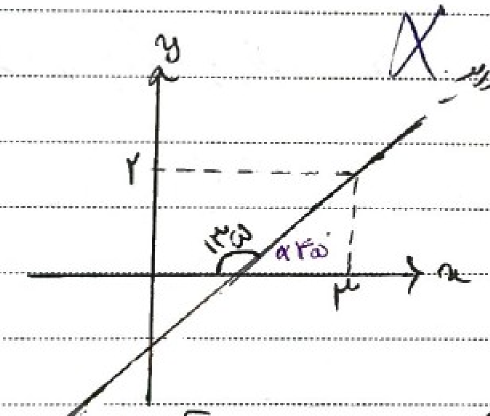
$(0, -3)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \longrightarrow$

$y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0)$

$y + 3 = \sqrt{3}x \rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$

مثال: با توجه به شکل زیر معادله خط L را بدست آورید.



$m = \tan 45 = 1$

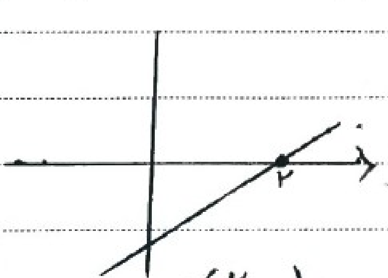
$(\underset{x}{3}, \underset{y}{2})$

$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow$

$y - 2 = 1\,(x - 3)$

$y = x - 3 + 2 \rightarrow y = x - 1$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور x ها را با طول ۲ قطع کرده و با جهت مثبت آن زاویه ۳۰ می‌سازد.



$(2, 0)$

$m = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$(\underset{x}{2}, \underset{y}{0})$

$y - \overset{0}{y_1} = \overset{\frac{\sqrt{3}}{3}}{m}(x - \overset{2}{x_1}) \rightarrow$

$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \rightarrow$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

روابط بین نسبت های مثلثاتی: در مثلثات نیز مانند اتحادهایی که در سال قبل یاد گرفتیم روابطی وجود دارد که باید آنها را به طور کامل یاد بگیریم و در سوالات مختلف از آن استفاده کنیم.

برای هر زاویه‌ی دلخواه α (آلفا) می‌توان از روابط زیر استفاده نمود.

1) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

5) $\tan\alpha \times \cot\alpha = 1$

$\boxed{\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2}$

6) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

7) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

نکته: زمانی که در سوالی sin و cos را به ما می‌دهند و دیگری را به ما می‌خواهند می‌توانیم با استفاده از $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ مجهول را بدست آورید

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

اگر $\sin\alpha$ را داده اند $\longrightarrow \cos\alpha = ? \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

" " $\cos\alpha \longrightarrow \sin\alpha = ? \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \longrightarrow \sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \xrightarrow{\text{جذر}}$ ← اثبات مانند

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

۳

مثال: اگر α در ناحیه سوم مثلثاتی باشد $\sin\alpha=\frac{-4}{5}$ باشد آنگاه مقدار $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ و $\tan\alpha$ را بدست آورید.

$\sin\alpha=\frac{-4}{5}$ α در ناحیه سوم است

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{-4}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{1}-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}\Rightarrow$$ در ناحیه سوم cos منفی است $-\frac{3}{5}$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\left(\frac{-4}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)}=\frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{-3}{5}}{\frac{-4}{5}}=\frac{3}{4}$$

اگر آلفا بین 90 و 180 (یعنی در ناحیه دوم قرار دارد) $\tan\alpha=\frac{-3}{4}$ آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را بدست آورید. α در ناحیه دوم قرار دارد

$$\tan\alpha=\frac{-3}{4}$$

$$\cot\alpha=\frac{-4}{3}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow 1+\left(\frac{-3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow$$

$$\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$$ در ناحیه دوم cos منفی است $-\frac{4}{5}$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{-4}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

درستی اتحاد های زیر را بررسی کنید (اثبات کنید)

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(1-\sin\theta)=\cos\theta$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1-\sin\theta)=\frac{\overbrace{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{\cos\theta}=$$

$$\frac{\overbrace{1-\sin^2\theta}^{\cos^2\theta}}{\cos\theta}\ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}{\cos^2\theta=1-\sin^2\theta}\ \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

تمرین صفحه ۴۵:

۱- اگر $\tan\alpha=\frac{-4}{3}$ و α در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را بدست آورید

$\tan=\frac{-4}{3}$ $\qquad$ $\cot=\frac{-3}{4}$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to 1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to\frac{1}{1}+\frac{16}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to$$

$$\cos^2\alpha=\frac{25}{9}\to\cos\alpha\pm\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{5}{3}$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{25}{9}}=\pm\frac{-16}{9}\Rightarrow\pm\frac{-4}{3}\Rightarrow-\frac{-4}{3}=+\frac{4}{3}$$

۲- اگر $\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$، آنگاه نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه 135° را بدست آورید

$$\cos 135^\circ=\pm\sqrt{1-\sin^2 135^\circ}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}}=$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\to-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-1$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{-1}\to-1$$

Subject: ....

Year:..........Month:..........Day:..........( )

۳- اگر $\tan 240 = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه 240° را بدست آورید

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 1+(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos^2\alpha = \pm\frac{1}{4} \to -\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \to \sin^2\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$\sin^2\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to \sin 240 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

ربع سوم α

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \to \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴- اگر α زاویه ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$ نسبت های دیگر مثلثاتی زاویه α را بدست آورید

$$\cos\alpha = \frac{-3}{5}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \to \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4}$$

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ درستی تساوی زیر را اثبات کنید

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

ب) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha$

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \xLeftrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

پ) $\dfrac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \dfrac{1}{\cos} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\cancel{\sin\theta}} \times \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

ت) $1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$

$$\frac{1}{1} - \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1+\sin - \cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{1+\sin\alpha} = $$

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$$