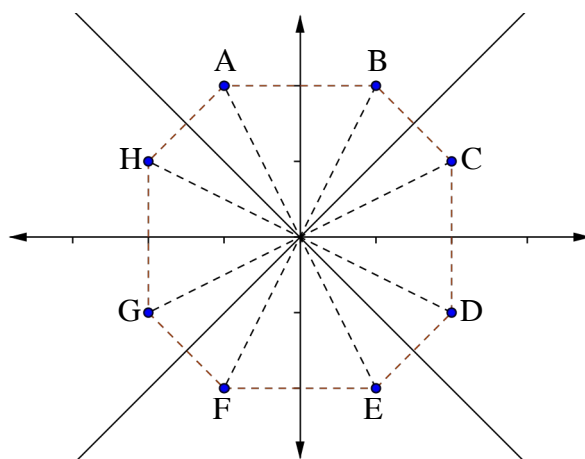


ریاضیات پایه

نویسنده

محمد علی مقدم زاوه



بهار ۱۳۹۴

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَالْعَصْرُ

الْأَلْفُ مِائَةُ وَخَمْسُونَ خَلْعًا

الْأَلْفُ مِائَةُ وَخَمْسُونَ خَلْعًا

تقدیم به

همه ی آنهایی که با ادب خود به دیگران احترام می گذارند.

نام کتاب : ریاضیات پایه
ویرایش اول : بهار ۱۳۹۴
نویسنده : محمد علی مقدم زاوه
صفحه آرا : محمد علی مقدم زاوه

مجوز



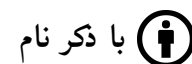
این کتاب تحت مجوز بین‌المللی زیر است :

Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0

برای دیدن یک رونوشت از این مجوز به آدرس زیر بروید :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

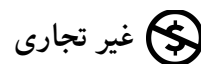
می‌توانید این کتاب را رایگان دریافت کنید و با دیگران به اشتراک بگذارید، با شرایط زیر :



با ذکر نام

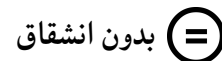
می‌توانید این کتاب را به اشتراک بگذارید ولی با ذکر نام نویسنده و آدرس زیر باشد :

www.abd124.ir



غیر تجاری

می‌توانید این کتاب را با هزینه‌ی خود چاپ یا بر روی لوح فشرده رایت کرده و به صورت رایگان منتشر کنید ولی اجازه‌ی استفاده‌ی تجاری و کسب درآمد از این کتاب را ندارید.



بدون انشقاق

می‌توانید این کتاب را تغییر شکل دهید ولی اجازه‌ی توزیع محتوای تغییر یافته را ندارید.

فهرست

۶.....	مجوز.....
۱۱.....	به نام خالق یکتای دادار.....
۱۳.....	فصل ۱ . توان و کاربردهای آن.....
۱۳.....	آشنایی با توان.....
۱۴.....	فرمول های توان.....
۱۴.....	روش های محاسبه ی توان.....
۱۵.....	نماد علمی.....
۱۶.....	تجزیه ی اعداد به عامل های اول.....
۱۷.....	بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک.....
۱۹.....	فصل ۲ . عبارت جبری، اتحاد و تجزیه.....
۱۹.....	آشنایی با عبارت جبری.....
۲۱.....	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چند جمله ای ها.....
۲۲.....	تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری.....
۲۳.....	آشنایی با اتحاد.....
۲۳.....	اتحادهای اصلی.....
۲۴.....	چند اتحاد مهم دیگر.....
۲۵.....	محاسبه به کمک اتحادها.....
۲۸.....	بسط دو جمله ای.....
۲۹.....	آشنایی با تجزیه.....
۲۹.....	روش های تجزیه.....
۳۲.....	بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها.....
۳۳.....	عبارت گویا.....
۳۷.....	فصل ۳ . قدر مطلق و جزء صحیح.....
۳۷.....	قدر مطلق.....
۳۸.....	جزء صحیح.....
۳۹.....	فصل ۴ . رادیکال.....
۳۹.....	آشنایی با رادیکال.....
۴۰.....	فرمول های رادیکال.....
۴۰.....	جمع، تفریق، ضرب و تقسیم رادیکال ها.....
۴۲.....	گویا کردن مخرج کسرها.....

۴۳.....	توان گویا و توان گنگ.....
۴۵.....	فصل ۵ . دستگاه محورهای مختصات و خط.....
۴۵.....	محور اعداد حقیقی.....
۴۶.....	دستگاه مختصات قائم دکارتی.....
۵۰.....	آشنایی با خط.....
۵۲.....	شیب خط.....
۵۴.....	روش محاسبه ی معادله ی خط.....
۵۶.....	فاصله ی نقطه از خط.....
۵۷.....	فاصله ی بین دو خط موازی.....
۵۸.....	تقارن.....
۵۹.....	انتقال محورهای مختصات.....
۶۱.....	فصل ۶ . معادله و نامعادله.....
۶۱.....	آشنایی با معادله.....
۶۱.....	معادله ی درجه ی اول.....
۶۲.....	دستگاه دو معادله ی دو مجهولی خطی.....
۶۳.....	دستگاه سه معادله ی سه مجهولی خطی.....
۶۴.....	معادله ی درجه ی دوم.....
۶۹.....	روابط بین ریشه‌های معادله ی درجه ی دوم.....
۷۰.....	معادله ی قابل تبدیل به معادله ی درجه ی دوم.....
۷۰.....	معادله ی درجه ی سوم.....
۷۱.....	معادله ی گویا.....
۷۱.....	معادله ی گنگ.....
۷۱.....	معادله ی شامل قدر مطلق.....
۷۲.....	معادله ی شامل جزء صحیح.....
۷۲.....	نامساوی.....
۷۳.....	بازه.....
۷۴.....	تعیین علامت و نامعادله.....
۷۹.....	فصل ۷ . دنباله.....
۷۹.....	آشنایی با دنباله.....
۸۰.....	دنباله ی حسابی.....
۸۲.....	دنباله ی هندسی.....
۸۳.....	مجموع جمله‌های دنباله ی حسابی.....
۸۵.....	مجموع جمله‌های دنباله ی هندسی.....
۸۶.....	مجموع همه ی جمله‌های دنباله ی هندسی نامتناهی.....
۸۷.....	دنباله ی مربعی.....
۸۸.....	دنباله ی مثلثی.....
۸۸.....	دنباله ی فیبوناتچی.....

نسبت طلایی.....	۸۹
فصل ۸ . لگاریتم	۹۱
آشنایی با لگاریتم.....	۹۱
فرمول های لگاریتم.....	۹۱
روش های محاسبه ی لگاریتم.....	۹۲
معادله ی لگاریتمی.....	۹۳
نامعادله ی لگاریتمی.....	۹۴
فصل ۹ . مثلثات	۹۵
واحدهای زاویه.....	۹۵
نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه.....	۹۷
دایره ی مثلثاتی.....	۹۸
تعیین نسبت های مثلثاتی تمام زاویه ها.....	۱۰۳
نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه.....	۱۰۳
نسبت های مثلثاتی دو برابر زاویه.....	۱۰۵
نسبت های مثلثاتی سه برابر زاویه.....	۱۰۶
فرمول های تبدیل جمع به ضرب مثلثاتی.....	۱۰۷
فرمول های تبدیل ضرب به جمع مثلثاتی.....	۱۰۸
کاربردهای مثلثات.....	۱۰۹
معادله ی مثلثاتی.....	۱۱۱
وارون نسبت های مثلثاتی.....	۱۱۳

به نام خالق یکتای دادار



۱- سخن اول

• در کتاب‌های یک دو چهار تلاش شده است که گامی هر چند کوچک برای افزایش دانش ریاضی شما خواننده ی عزیز برداشته شود. امید آن می‌رود که از خواندن این کتاب‌ها لذت ببرید و علاقه ی شما به ریاضی بیشتر شود.

۲- سخن با دانش آموز

• یادگیری ریاضی نیازمند تمرین است و تمرین حوصله می‌خواهد. زمان مناسبی را برای تمرین انتخاب کن. عجله نکن. درباره ی مفاهیم ریاضی دقیق فکر کن و برای فهم بیشتر آنها تمرین‌های متفاوتی را حل کن. نوشتن را فراموش نکن. نوشتن اعتماد به نفس تو را افزایش می‌دهد. لطفاً به نکات زیر توجه کن :

(۱) در کلاس درس به گفته‌های معلم خوب گوش بده و توجه کن.

(۲) کتاب‌های درسی را به دقت مطالعه کن.

(۳) استفاده از ماشین حساب ایرادی ندارد و بهتر است که از ماشین حساب مهندسی استفاده کنی.

(۴) استفاده از نرم افزارهای ریاضی ضروری به نظر می‌رسد. جئوجبرا یکی از نرم افزارهای خوب ریاضی است که

کار با آن بسیار راحت می‌باشد. این نرم‌افزار به زبان فارسی ترجمه شده و دارای راهنمای فارسی نیز است. برای دانلود آن می‌توانی به آدرس زیر مراجعه کنی :

www.geogebra.org

۳- سخن با معلم

• آموزش ریاضی نیازمند آگاهی است و آگاهی مطالعه می‌خواهد. مطالعه یادمان نرود. همیشه به روز باشیم. در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش آموز دقت لازم را داشته باشیم. توانایی‌های دانش آموز را باور داشته باشیم و به او اجازه دهیم که توانایی‌های خود را نشان دهد. دانش آموز را به ریاضی علاقه‌مند کنیم.

۴- سخن آخر

• در پایان از انتقادات و پیشنهادهای شما خواننده ی عزیز صمیمانه استقبال می‌شود.

با نهایت ادب و احترام

محمد علی مقدم زاوه

۱ قواعد و کاربردهای آن

۱. آشنایی با توان

- برای آشنایی با توان، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

$$3+3+3+3+3+3+3+3=8 \times 3$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$$

$$2^{20} = 1073741824$$

$$3^{20} = 3486784401$$

$$(-3)^9 = -19683$$

$$(-3)^{10} = 59049$$

$$2^3 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^5} = 2^{3+5} = 2^8$$

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$2^3 \times 5^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{5^3} = \underbrace{2 \times 5}_{10} \times \underbrace{2 \times 5}_{10} \times \underbrace{2 \times 5}_{10} = (2 \times 5)^3 = 10^3$$

$$\frac{6^8}{3^8} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^8 = 2^8$$

$$3^0 = 3^{8-8} = \frac{3^8}{3^8} = 1$$

$$3^{-2} = 3^{0-2} = \frac{3^0}{3^2} = \frac{1}{3^2}$$

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$2^{3^2} = 2^{(2^2)} = 2^4$$

۲. فرمول های توان

• اعداد حقیقی a و b و اعداد طبیعی m و n را در نظر بگیرید.

$$(۱) \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرتبه}}$$

$$(۲) \quad a^1 = a$$

$$(۳) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(۴) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(۵) \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$(۶) \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(۷) \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$(۸) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(۹) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$(۱۰) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

۳. روش های محاسبه ی توان

۱- برای آشنایی با روش های محاسبه ی توان، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.
مثال اول

$$\frac{2^{13} \times 3^5}{6^9} = \frac{2^{13} \times 3^5}{2^9 \times 3^9} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

مثال دوم

$$\frac{8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3}{2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5} = \frac{4 \times 8^3}{8 \times 2^5} = \frac{2^2 \times (2^3)^3}{2^3 \times 2^5} = \frac{2^{11}}{2^8} = 2^3 = 8$$

مثال سوم

$$\frac{8^4 \times 4^8}{6^{28} \times 9^{-14}} = \frac{8^4 \times 4^8 \times 9^{14}}{6^{28}} = \frac{2^{12} \times 2^{16} \times 3^{28}}{2^{28} \times 3^{28}} = \frac{2^{28} \times 3^{28}}{2^{28} \times 3^{28}} = 1$$

۲- تمرین. کسره‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(آ) \frac{6^8 \times 8^9 \times 9^{12}}{2^{24} \times 3^{23}}$$

$$(ب) \frac{8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3 + 8^3}{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}$$

۳- تمرین. در هر یک از قسمت‌های زیر، مقدار x را بیابید.

$$(آ) 8^{x+1} \times 4^{3-2x} = 256$$

$$(ب) \frac{27^{x-5}}{81^{yx}} = 243^{1-x}$$

$$(پ) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 1/875$$

$$(ت) \frac{9^{x-1} + 9^x + 9^{x+1}}{27^x} = 819$$

۴- سؤال. آیا عدد 2^{300} بزرگتر از عدد 3^{200} است؟ چرا؟

۴. نماد علمی

۱- آشنایی با نماد علمی

$$\text{سرعت نور} = 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\text{عدد آووگادرو} = 602000000000000000000000 = 6.02 \times 10^{23}$$

$$\text{جرم الکترون} = 0.0000000000000000000000009109 \text{ g} = 9.109 \times 10^{-28} \text{ g}$$

• هر عدد حقیقی مثبت را می‌توان به صورت $a \times 10^n$ نوشت که $1 \leq a < 10$ و $n \in \mathbb{Z}$. به این نوع نمایش از یک عدد، نماد علمی گفته می‌شود.

• از نماد علمی برای نمایش اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک استفاده می‌شود.

۲- تمرین. نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

$$(آ) 30200000000$$

$$(ب) 0.30200000000$$

$$(پ) 0.008 \times 0.000087 \times (0.0002)^{-3}$$

$$(ت) \frac{21/6 \times (0.02)^{-4}}{(0.003)^3}$$

۵. تجزیه ی اعداد به عامل های اول

۱- آشنایی با تجزیه ی اعداد به عامل های اول

۵۰۴	۲
۲۵۲	۲
۱۲۶	۲
۶۳	۳
۲۱	۳
۷	۷
۱	

$$۵۰۴ = ۲^3 \times 3^2 \times 7^1$$

۵۴۰	۲
	۵
۵۴	۲
۲۷	۳
۹	۳
۳	۳
۱	

$$۵۴۰ = ۲^3 \times 3^2 \times 5^1$$

- هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را می توان به طور یکتایی به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. به این نوع نمایش از یک عدد، تجزیه ی به عامل های اول گفته می شود.
 - یک عدد طبیعی مربع کامل است هرگاه توان تمام عامل های اول آن زوج باشند.
 - یک عدد طبیعی مکعب کامل است هرگاه توان تمام عامل های اول آن مضرب ۳ باشد.
 - تعداد مقسوم علیه های عدد طبیعی $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ برابر است با $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.
- ۲- تمرین. اعداد زیر را به عامل های اول تجزیه کنید.

(آ) ۴۵۶

(ب) ۹۷۵

(پ) ۸۵۰۵

(ت) ۳۰۶۰۰

- ۳- تمرین. کوچکترین عدد طبیعی n را طوری بیابید که $۲۴۰۰ \times n$ مربع کامل باشد.
- ۴- تمرین. کوچکترین عدد طبیعی n را طوری بیابید که $۲۴۰۰ \times n$ مکعب کامل باشد.
- ۵- تمرین. عدد ۲۲۵۰ چند مقسوم علیه دارد؟ چرا؟ آنها را بنویسید.

۶. بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

۱- آشنایی با بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

$$24 = 2^3 \times 3^1 \quad 60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

۲۴ = مقسوم علیه های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲، ۲۴

۶۰ = مقسوم علیه های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰

۶۰ و ۲۴ = مقسوم علیه های مشترک ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲

۶۰ و ۲۴ = بزرگترین مقسوم علیه مشترک $(24, 60) = 12$

۲۴ مضرب های ۲۴، ۴۹، ۷۲، ۹۶، ۱۲۰، ۱۴۴، ۱۶۸، ۱۹۲، ۲۱۶، ۲۴۰، ۲۶۴، ۲۸۸، ۳۱۲، ۳۳۶، ۳۶۰، ...

۶۰ مضرب های ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۲۴۰، ۳۰۰، ۳۶۰، ...

۶۰ و ۲۴ = مضرب های مشترک ۱۲۰، ۲۴۰، ۳۶۰، ...

۶۰ و ۲۴ = کوچکترین مضرب مشترک $[24, 60] = 120$

- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی m و n که با نماد (m, n) نمایش داده می شود، برابر است با حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان کوچکتر.

$$(24, 60) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

- به بزرگترین مقسوم علیه مشترک به اختصار ب.م.م گفته می شود.
- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی m و n که با نماد $[m, n]$ نمایش داده می شود، برابر است با حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان بزرگتر ضرب در عامل های اول غیر مشترک.

$$[24, 60] = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 8 \times 3 \times 5 = 120$$

- به کوچکترین مضرب مشترک به اختصار ک.م.م گفته می شود.

$$[m, n] = \frac{m \times n}{(m, n)}$$

- دو عدد طبیعی m و n نسبت به هم اول نامیده می شوند هرگاه $(m, n) = 1$.

۲- تمرین. به کمک تجزیه ی اعداد به عامل های اول، ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۲۸۸ و ۴۵۶ را به دست آورید.

۳- تمرین. عدد طبیعی n را طوری بیابید که $[48n, 80n] = 720$.

۴- تمرین. مقادیر α و β را طوری بیابید که دو عدد طبیعی $18^4 \times 125^{\alpha-5}$ و $9^{\beta-2} \times 25^2$ نسبت به هم اول باشند.

۲. عبارات جبری، اتحاد و تجزیه

۱. آشنایی با عبارت جبری

۱- در جدول زیر، مثالهایی از عبارت جبری آمده است.

عبارت گنگ	عبارت گویا	چند جمله ای	یک جمله ای
$\sqrt{x+1}$	$\frac{x+2}{x-3}$	$2x^3 - 3x^2 + x - 1$	$\sqrt{4}x$
$\frac{2}{\sqrt{x-3}} + 1$	$\frac{5}{x}$	$\frac{3}{4}x + \sqrt{6}$	$\frac{5}{3}x^2y^2$
$\sqrt{x-\sqrt{x}}$	$3x^{-2} + 2x - 1$	$x^2y^2 + x^2y^3$	$-2 + \sqrt{7}$

۲- تمرین. مقدار عددی عبارت جبری زیر را به ازای $x=-1$ ، $y=2$ و $z=-4$ حساب کنید.

$$\frac{6x^4y^2 + 1}{3z - 4y - 15x^3}$$

۳- تمرین. مقدار عددی عبارت جبری زیر را به ازای $a=3$ ، $b=4$ ، $c=5$ و $p = \frac{a+b+c}{2}$ حساب کنید.

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۴- درجه ی یک جمله ای

• برای آشنایی با درجه ی یک جمله ای، به جدول زیر توجه کنید.

درجه	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	یک جمله ای
۴	۳	۰	۳	$4x^3z$
۶	۳	۲	۱	$-2xy^2z^2$

- درجه ی یک جمله ای نسبت به یک متغیر برابر است با توان آن متغیر در یک جمله ای.
- درجه ی یک جمله ای نسبت به چند متغیر برابر است با مجموع توان های آن متغیرها در یک جمله ای.
- درجه ی یک جمله ای برابر است با مجموع توان های متغیرها در یک جمله ای.

۵- درجه ی چند جمله‌ای

- برای آشنایی با درجه ی چند جمله‌ای، به جدول زیر توجه کنید.

درجه	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	چند جمله‌ای
۸	۵	۳	$۲x^۳y^۴-۳x^۲y^۵z$

- درجه ی چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است با بیشترین توان آن متغیر در چند جمله‌ای.
- درجه ی چند جمله‌ای برابر است با درجه ی جمله‌ای از جملات آن چند جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد.

۶- چند جمله‌ای استاندارد

- برای آشنایی با چند جمله‌ای استاندارد، به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$x^۵+۴x^۳-۷x^۲+۶x+۸$$

$$۲x^۳y^۲+۳x^۲y^۳-۶xy+۵$$

$$۳x^۲y^۳+۲x^۳y^۲-۶xy+۵$$

- چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر استاندارد است هرگاه بر حسب آن متغیر از توان بزرگ به توان کوچک مرتب شده باشد.

۷- چند جمله‌ای کامل

- برای آشنایی با چند جمله‌ای کامل، به مثال زیر توجه کنید.

$$x^۴-x^۳+x^۲-x+۱$$

- یک چند جمله‌ای درجه ی n کامل است هرگاه همه ی جملات درجه ی ۰ تا n را داشته باشد.

۸- چند جمله‌ای همگن

- برای آشنایی با چند جمله‌ای همگن، به مثال زیر توجه کنید.

$$x^۵+x^۲y^۳+x^۳y^۲+z^۵$$

- یک چند جمله‌ای همگن است هرگاه درجه ی همه ی جملات آن با هم برابر باشند.

۹- چند جمله‌ای متقارن

- برای آشنایی با چند جمله‌ای متقارن، به مثال زیر توجه کنید.

$$x^۴+x^۲y^۳+x^۳y^۲+y^۴$$

- یک چند جمله‌ای دو متغیره متقارن است هرگاه با جابجایی متغیرهای آن تغییر نکند.

۲. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چند جمله‌ای ها

۱- جمع، تفریق و ضرب چند جمله‌ای ها

- برای آشنایی با جمع، تفریق و ضرب چند جمله‌ای ها به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$(2x+3)(5x^2-6x+1) \stackrel{?}{=} 10x^3-12x^2+2x+15x^2-18x+3 \stackrel{?}{=} 10x^3+3x^2-16x+3$$

مثال دوم

$$2xy(x^2y^3-x^3y^2)-x^2y(2xy^3+x^2y^2)+3x^4y^2 \stackrel{?}{=} 2x^3y^4-2x^4y^3-2x^2y^4-x^4y^3+3x^4y^2 \stackrel{?}{=} 0$$

- ۲- تمرین. عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(x+2)(2x-1)(3x+2)-(x+4)(1-4x)-5x-3$$

- ۳- تمرین. اگر $A=x+2$ ، $B=3-x$ و $C=x^2+x+1$ ، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(A) \quad 2AB-3C-5 \quad (B) \quad A(B+C)-B(C-A)+xC-1$$

۴- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

- برای آشنایی با تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\frac{4x^3-8x^2+6x-12}{4x^2} = \frac{4x^3}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2} + \frac{6x}{4x^2} - \frac{12}{4x^2} = x-2+\frac{3}{2x}-\frac{3}{x^2}$$

- ۵- تمرین. تقسیم زیر را انجام دهید.

$$\frac{15x^3y^4-20x^5y^3+55x^3y^5}{10x^3y^4}$$

۶- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

- برای آشنایی با تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$\begin{array}{r|l} 4x^3-7x^2+6x-10 & -x+2 \\ \hline -4x^3+8x^2 & -4x^2-x-8 \\ \hline x^2+6x-10 & \\ -x^2+2x & \\ \hline 8x-10 & \\ -8x+16 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

مثال دوم

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+x+1 & x^2+2x+3 \\ \hline -x^4-2x^3-3x^2 & x^2-x-1 \\ \hline -x^3-3x^2+x+1 & \\ x^3+2x^2+3x & \\ \hline -x^2+4x+1 & \\ x^2+2x+3 & \\ \hline 6x+4 & \end{array}$$

- در هر مرحله ی تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه باید استاندارد باشند.
- تقسیم تا وقتی ادامه می‌یابد که باقیمانده صفر شود یا درجه ی آن از درجه ی مقسوم علیه کمتر شود.

۷- تمرین. تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(ا)} & \begin{array}{r} -3x^2 + 5x + 9 + x^3 \\ \hline x+1 \end{array} & \text{(ب)} \begin{array}{r} x^6 + 2x^3 + 5 \\ \hline x^2 - 1 \end{array} \\
 \text{(پ)} & \begin{array}{r} 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1 \\ \hline 2x^2 - x + 1 \end{array} & \text{(ت)} \begin{array}{r} x^3 + x^2y - xy^2 - 2y^3 \\ \hline x+y \end{array}
 \end{array}$$

۳. تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۱- باقیمانده ی تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $ax+b$ که با نماد R نمایش داده می شود، برابر است با :

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

۲- مثال. باقیمانده ی تقسیم $\frac{-7x^2 + 4x^3 + 6x - 10}{-x+2}$ را به دست آورید.

حل.

$$-x+2=0 \Rightarrow x=2$$

$$R = P(2) = -7(2)^2 + 4(2)^3 + 6(2) - 10 = 6$$

۳- مثال. باقیمانده ی تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x+3$ و $x-2$ به ترتیب برابر ۶ و ۱۱ است. باقیمانده ی تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 را به دست آورید.

حل.

$$P(x) = (x^2+x-6)Q(x) + ax+b$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow P(-3)=0-3a+b=6 \Rightarrow b=3a+6$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=0+2a+b=11 \Rightarrow 2a+3a+6=11 \Rightarrow 5a=5 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=9$$

$$\Rightarrow \text{باقیمانده} = R(x) = x+9$$

۴- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که چند جمله ای $(k+1)x^5 + x^3 - k - 4$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد.

۵- تمرین. مقادیر a و b را طوری بیابید که خارج قسمت و باقیمانده ی تقسیم $\frac{x^2-5x-a}{x+b}$ به ترتیب $x-7$ و ۵ باشد.

باشد.

۶- تمرین. باقیمانده ی تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر x و $x-5$ به ترتیب برابر ۸ و -۷ است. باقیمانده ی تقسیم $P(x)$ بر x^2-5x را به دست آورید.

۷- تمرین. مقادیر m و n را طوری بیابید که چند جمله ای $x^3 + mx^2 + nx + 4$ بر $x+2$ و $x-2$ بخش پذیر باشد.

۴. آشنایی با اتحاد

۱- به جدول زیر توجه کنید.

x	$x+3$	$x-3$	$(x+3)(x-3)$	x^2-9
۱	۴	-۲	-۸	-۸
-۴	-۱	-۷	۷	۷
۲۰	۲۳	۱۷	۳۹۱	?
$\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}+3$	$\sqrt{۱۰}-3$	?	?

$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9 \Rightarrow (x+3)(x-3)=x^2-9$$

• به یک معادله ی همواره درست، اتحاد گفته می شود.

۲- تمرین. کدام یک از معادله های زیر اتحاد هستند؟ چرا؟

$$(a) \quad (5x+3)(x+4)=(5x+4)(x+3) \quad (b) \quad (x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)=x^6-1$$

۵. اتحادهای اصلی

۱- اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

۲- اتحاد مربع دو جمله ای

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

۳- اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

۴- اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

۵- تعمیم اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

۶- اتحاد مکعب دو جمله ای

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$$

۷- اتحاد مجموع یا تفاضل مکعبات

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

• این اتحاد به اتحاد چاق و لاغر معروف شده است.

۸- تعمیم اتحاد چاق و لاغر

$$\begin{aligned}(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) &= a^n-b^n \\ (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots-ab^{n-2}+b^{n-1}) &= a^n+b^n \quad (n \text{ فرد}) \\ (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}-b^{n-1}) &= a^n-b^n \quad (n \text{ زوج})\end{aligned}$$

• در حالت خاص $b=1$ ،

$$\begin{aligned}(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1) &= a^n-1 \\ (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots-a+1) &= a^n+1 \quad (n \text{ فرد}) \\ (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots+a-1) &= a^n-1 \quad (n \text{ زوج})\end{aligned}$$

۶. چند اتحاد مهم دیگر

۱- چهار اتحاد زیر از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ a^2+b^2 &= (a-b)^2+2ab \\ (a+b)^2+(a-b)^2 &= 2a^2+2b^2 \\ (a+b)^2-(a-b)^2 &= 4ab\end{aligned}$$

۲- دو اتحاد زیر از اتحاد مکعب دو جمله‌ای به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ a^3-b^3 &= (a-b)^3+3ab(a-b)\end{aligned}$$

۳- اتحاد زیر از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آید.

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

از این اتحاد نتیجه می‌شود:

$$a=b=c \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$$

۴- اتحاد اویلر

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

از اتحاد اویلر نتیجه می‌شود:

$$a+b+c=0 \text{ یا } a=b=c \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

۵- اتحاد لاگرانژ

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2) &= (ax+by)^2+(ay-bx)^2 \\ (a^2-b^2)(x^2-y^2) &= (ax+by)^2-(ay-bx)^2\end{aligned}$$

۷. محاسبه به کمک اتحادها

۱- محاسبه به کمک اتحادهای اصلی

• برای آشنایی با محاسبه به کمک اتحادهای اصلی، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$(\omega x + 3)(\omega x - 3) = (\omega x)^2 - (3)^2 = 2\omega x^2 - 9$$

مثال دوم

$$(x+2)(x-2)(x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = (x^2)^2 - (4)^2 = x^4 - 16$$

مثال سوم

$$(4x+3y)^2 = (4x)^2 + (3y)^2 + 2(4x)(3y) = 16x^2 + 9y^2 + 24xy$$

مثال چهارم

$$(13-7x)^2 = (13)^2 + (7x)^2 - 2(13)(7x) = 169 + 49x^2 - 182x$$

مثال پنجم

$$(x+2)(x-2)(x^2-4) = (x^2-4)(x^2-4) = (x^2-4)^2 = (x^2)^2 + (4)^2 - 2(x^2)(4) = x^4 + 16 - 8x^2$$

مثال ششم

$$999^2 = (1000-1)^2 = (1000)^2 + (1)^2 - 2(1000)(1) = 1000000 + 1 - 2000 = 998001$$

مثال هفتم

$$\begin{aligned} (2x-3y-z)^2 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)(-z) + 2(-3y)(-z) \\ &= 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 4xz + 6yz \end{aligned}$$

مثال هشتم

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)^2 &= (x^2)^2 + (x)^2 + (1)^2 + 2(x^2)(x) + 2(x^2)(1) + 2(x)(1) \\ &= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

مثال نهم

$$(x+3)(x+4) = x^2 + (3+4)x + (3)(4) = x^2 + 7x + 12$$

مثال دهم

$$(x-15)(x+14) = x^2 + (-15+14)x + (-15)(14) = x^2 - x - 210$$

مثال یازدهم

$$(\omega x + 7)(\omega x - 3) = (\omega x)^2 + (7-3)(\omega x) + (7)(-3) = 2\omega x^2 + 2\omega x - 21$$

مثال دوازدهم

$$(x+2)(x-2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = (x^2)^2 + (-4+3)(x^2) + (-4)(3) = x^4 - x^2 - 12$$

مثال سیزدهم

$$\begin{aligned} 1002 \times 997 &= (1000+2)(1000-5) = (1000)^2 + (2-5)(1000) + (2)(-5) \\ &= 1000000 - 3000 - 10 = 996990 \end{aligned}$$

مثال چهاردهم

$$(x-4)(x-2)(x+3) \stackrel{?}{=} x^3 + (-4-2+3)x^2 + (8-12-6)x + 24 = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

مثال پانزدهم

$$(2x+y)^3 = (2x)^3 + (y)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)(y)^2 = 8x^3 + y^3 + 12x^2y + 6xy^2$$

مثال شانزدهم

$$(\Delta - 7x)^3 = (\Delta)^3 - (7x)^3 - 3(\Delta)^2(7x) + 3(\Delta)(7x)^2 = 12\Delta - 343x^3 - 525x + 695x^2$$

مثال هفدهم

$$1001^3 = (1000+1)^3 = (1000)^3 + (1)^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 \\ = 1000000000 + 1 + 3000000 + 3000 = 1003003001$$

مثال هجدهم

$$(2x+\Delta)(4x^2-10x+25) = (2x)^3 + (\Delta)^3 = 8x^3 + 125$$

مثال نوزدهم

$$(3ax-y)(9a^2x^2+3axy+y^2) = (3ax)^3 - (y)^3 = 27a^3x^3 - y^3$$

مثال بیستم

$$(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4) = (x^2+8)(x^2-8) = x^4 - 64$$

مثال بیست و یکم

$$(x+1)(x^2-x+1)(x-3)(x^2+3x+9) = (x^3+1)(x^3-27) = x^6 - 26x^3 - 27$$

مثال بیست و دوم

$$(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32x^2+64x+128) = (x)^6 - (2)^6 = x^6 - 128$$

مثال بیست و سوم

$$(2x+3y)(16x^4-24x^3y+36x^2y^2-54xy^3+81y^4) = (2x)^5 + (3y)^5 = 32x^5 + 243y^5$$

مثال بیست و چهارم

$$(x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+x^2-x^2+1)(x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1) = (x^{10}-1)(x^{10}+1) \\ = x^{20}-1$$

۲- تمرین. حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(أ) \quad (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{4})(x^2+\frac{1}{16}) \quad (ب) \quad (a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

$$(پ) \quad (1-2x-3x^2)^2 \quad (ت) \quad (x+\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-y)^2$$

$$(ث) \quad (x+9)(x-8) - (\Delta+2x)(\Delta-6x) \quad (ج) \quad (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^4+x^2+3)$$

$$(چ) \quad (2x+1)(2x-3)(2x+\Delta)$$

$$(ح) \quad (2+xyz)^3$$

$$(خ) \quad (x^2-x+1)^3$$

$$(د) \quad (a-a^2)(a^2+a^3+a^4)$$

$$(ذ) \quad (x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)(x^6+2)$$

$$(ر) \quad (a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+a^2b^4+a^2b^6+b^4)$$

۳- مثال. اگر $a+b=7$ و $ab=2$ ، مقدار عبارت های زیر را به دست آورید.

(آ) a^2+b^2 (ب) $(a-b)^2$ (پ) a^3+b^3 (ت) a^4+b^4

حل.

(آ) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=7^2-2(2)=49-4=45$

(ب) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=45-2(2)=45-4=41$

(پ) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=7^3-3(2)(7)=343-42=301$

(ت) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(45)^2-2(4)=2025-8=2017$

۴- تمرین. اگر $x+\frac{1}{x}=6$ ، مقدار عبارت های زیر را به دست آورید.

(آ) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$ (پ) $x^4+\frac{1}{x^4}$ (ت) $x^6+\frac{1}{x^6}$

۵- تمرین. مقادیر x ، y و z را طوری بیابید که $x^2+4y^2+5z^2+2x-8y+5=0$.

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

مثال سوم

$$\begin{aligned}(x-2)^6 &= (x)^6 + 6(x)^5(-2)^1 + 15(x)^4(2)^2 + 20(x)^3(-2)^3 + 15(x)^2(-2)^4 + 6(x)(-2)^5 + (-2)^6 \\ &= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64\end{aligned}$$

-۴ تمرین. دو جمله‌ای‌های زیر را بسط دهید.

$$(a) \quad (4+xy)^5 \quad (b) \quad (2x-3y)^6$$

۹. آشنایی با تجزیه

-۱ به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$6-xy+2y-3x=(2-x)(3+y)$$

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$$

• به نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری، تجزیه گفته می‌شود.

-۲ تمرین. کدام یک از عبارت‌های زیر را می‌توان تجزیه کرد؟ چرا؟

$$(a) \quad x^2+9 \quad (b) \quad x^4+4$$

۱۰. روش‌های تجزیه

-۱ فاکتورگیری

• برای آشنایی با فاکتورگیری، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$20x^4 - 15x^3 + 35x^2 = 5x^2(4x^2 - 3x + 7)$$

مثال دوم

$$35x^3y^2z + 42x^2yz^2 = 7x^2yz(5y^2 + 6xz)$$

-۲ دسته بندی

• برای آشنایی با دسته بندی، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$mn+an+mb+ab = \underbrace{mn+mb}_{m(n+b)} + \underbrace{an+ab}_{a(n+b)} = m(n+b) + a(n+b) = (n+b)(m+a)$$

مثال دوم

$$6-xy+2y-3x = \underbrace{6-3x}_{3(2-x)} + \underbrace{2y-xy}_{y(2-x)} = 3(2-x) + y(2-x) = (2-x)(3+y)$$

۳- تجزیه به کمک اتحادها

- برای آشنایی با تجزیه به کمک اتحادها، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$25x^2 - 64 = (5x - 8)(5x + 8)$$

مثال دوم

$$x^2 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

مثال سوم

$$1017^2 - 983^2 = (1017 - 983)(1017 + 983) = 34 \times 2000 = 68000$$

مثال چهارم

$$\begin{aligned} 36 - x^2y^2 - 4x^2 + 9y^2 &= \underbrace{36 - 4x^2}_{(3-x)(3+x)} + \underbrace{9y^2 - x^2y^2}_{(4+y^2)(9-x^2)} \\ &= (3-x)(3+x)(4+y^2) \end{aligned}$$

مثال پنجم

$$\underbrace{4x^2 + 12xy + 9y^2}_{(2x+3y)^2} - 49 = (2x+3y)^2 - 49 = (2x+3y+7)(2x+3y-7)$$

مثال ششم

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$$

مثال هفتم

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

مثال هشتم

$$x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$$

مثال نهم

$$x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$$

مثال دهم

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

مثال یازدهم

$$9x^2 + 21x - 44 = (3x)^2 + 7(3x) - 44 = (3x+11)(3x-4)$$

مثال دوازدهم

$$3x^2 + 7x + 2 = \frac{(3x)^2 + 7(3x) + 6}{3} = \frac{(3x+3)(3x+2)}{3} = (x+1)(3x+2)$$

مثال سیزدهم

$$6x^2 - x - 15 = \frac{(6x)^2 - (6x) - 90}{6} = \frac{(6x+9)(6x-10)}{3 \times 2} = (2x+3)(3x-5)$$

مثال چهاردهم

$$x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = (x^2 - 9)(x^2 - 16) = (x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)$$

مثال پانزدهم

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$$

مثال شانزدهم

$$8 + 27x^3 = (2 + 3x)(4 - 6x + 9)$$

مثال هفدهم

$$x^6 - 64 = (x^3 + 8)(x^3 - 8) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

مثال هجدهم

$$x^6 + 7x^3 - 8 = (x^3 + 8)(x^3 - 1) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

مثال نوزدهم

$$x^{10} - 1 = (x^5 + 1)(x^5 - 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

مثال بیستم

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$$

-۴ افزودن و کاستن

• برای آشنایی با روش افزودن و کاستن، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$x^4 + 4 = \underbrace{x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2}_{(x^2 + 2)^2 - 4x^2} = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

مثال دوم

$$x^5 + x + 1 = \underbrace{x^5 - x^2 + x^2 + x + 1}_{x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1)} = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

-۵ شکستن

• برای آشنایی با روش شکستن، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$x^4 + x^2 + 1 = \underbrace{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2}_{(x^2 + 1)^2 - x^2} = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

مثال دوم

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = \underbrace{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2}_{(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2} = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

-۶ تمرین. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$(ا) \quad 16x^4 - 81y^2z^4$$

$$(ب) \quad a^4 - 1$$

$$(پ) \quad x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$(ت) \quad (x^2 + 8x + 8)^2 - 64$$

- (ث) $x^2 + 7x - 60$ (ج) $-9x^2 + 13x + 10$
 (چ) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$ (ح) $9 - 15x - 14x^2$
 (خ) $x^2 - 4xy - 21y^2$ (د) $x^4 + x^2y^2 - 2y^4$
 (ذ) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$ (ر) $8x^3y^2 + 1$
 (ز) $x^6 - 1$ (ژ) $x^6 + 1$
 (س) $32x^5 + 243$ (ش) $x(x+1)(x+2)(x+3) - 99$
 (ص) $x^4 + x^3 + 1$ (ض) $x^{10} + x^5 + 1$
 (ط) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$ (ظ) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

۷- تمرین. در مثلث ABC، رابطه ی زیر بین ضلع های آن برقرار است. نوع مثلث را مشخص کنید.

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$$

۱۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها

۱- آشنایی با بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها

$$(x^2 - 1)^3 (x^2 + x - 2)^4 \stackrel{?}{=} (x - 1)^7 (x + 1)^3 (x + 2)^4$$

$$(x^2 - 4)^2 (x^2 - x - 2)^6 \stackrel{?}{=} (x - 2)^4 (x + 2)^2 (x + 1)^6$$

$$\text{م.م.ب.} = (x + 1)^3 (x + 2)^2$$

$$\text{م.م.ک.} = (x + 1)^6 (x + 2)^4 (x - 1)^7 (x - 2)^4$$

• بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو چند جمله ای که به اختصار ب.م.م گفته می شود، برابر است با حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان کوچکتر.

• کوچکترین مضرب مشترک دو چند جمله ای که به اختصار ک.م.م گفته می شود، برابر است با حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان بزرگتر ضرب در عامل های اول غیر مشترک.

۲- تمرین. ب.م.م و ک.م.م دو چند جمله ای $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ و $x^4 + x^2 + 1$ را به دست آورید.

۱۲. عبارت گویا

۱- دامنه ی عبارت گویا

• عبارت گویای $\frac{x+1}{x-6}$ را در نظر بگیرید.

$$x=5 \Rightarrow \frac{5+1}{2(5)-6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x=7 \Rightarrow \frac{7+1}{2(7)-6} = \frac{8}{8} = 1$$

$$x=-1 \Rightarrow \frac{-1+1}{2(-1)-6} = \frac{0}{-8} = 0$$

$$x=3 \Rightarrow \frac{3+1}{2(3)-6} = \frac{4}{0} = ?$$

$$\text{دامنه ی عبارت گویا } D = \mathbb{R} - \{3\}$$

• دامنه ی یک عبارت گویا که با نماد D نمایش داده می شود، برابر است با همه ی اعداد حقیقی به جزء ریشه های مخرج آن.

۲- چند مثال

مثال اول

$$\frac{x^2+1}{5x+20}$$

$$5x+20=0 \Rightarrow 5x=-20 \Rightarrow x=-\frac{20}{5}=-4 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-4\}$$

مثال دوم

$$\frac{5}{x^2-9x-36}$$

$$x^2-9x-36=0 \Rightarrow (x-12)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-12=0 \Rightarrow x=12 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{12, -3\}$$

مثال سوم

$$\frac{x+7}{x^3-100x}$$

$$x^3-100x=0 \Rightarrow x(x-10)(x+10)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-10=0 \Rightarrow x=10 \\ x+10=0 \Rightarrow x=-10 \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0, 10, -10\}$$

۳- تمرین. دامنه ی عبارت های گویای زیر را به دست آورید.

$$(آ) \quad \frac{1}{x^2+20x+84}$$

$$(ب) \quad \frac{x}{x^3+20x^2+84x}$$

$$(پ) \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 10x^2 + 9} \quad (ت) \quad \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{2x-1}{x-2}}$$

۴- جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عبارت های گویا

• برای آشنایی با جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عبارت های گویا، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.
مثال اول

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x^2+1+2x-3-x+2}{x^2-1} = \frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1}$$

مثال دوم

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+3} + \frac{x+2}{x-3} - \frac{x^2+9}{x^2-9} &= \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)} - \frac{x^2+9}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{x(x-3) + (x+3)(x+2) - (x^2+9)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{x^2-3x+x^2+5x+6-x^2-9}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \end{aligned}$$

مثال سوم

$$\frac{x^2+3x}{2x-6} \times \frac{10}{x+3} = \frac{x(x+3)}{2(x-3)} \times \frac{10}{x+3} = \frac{5x}{x-3}$$

مثال چهارم

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-9} = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} \times \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = 1$$

۵- تمرین. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (ا) \quad & \frac{3x^2+5x+2}{x+4} - \frac{x^2-x+3}{x+4} + \frac{1-6x-2x^2}{x+4} & (ب) \quad & \frac{3-2x}{2x+3} - \frac{2x+3}{3-2x} + \frac{36}{4x^2-9} \\ (پ) \quad & \frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \times \frac{b^2-ab}{a^2+b^2} & (ت) \quad & \frac{2x^2+3x+1}{x^2-1} \div \frac{4x^2-1}{2x^2-3x+1} \\ (ث) \quad & \frac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} & (ج) \quad & \frac{\frac{x^2+1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

۶- تمرین. عبارت گویای $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ را در نظر بگیرید.

(آ) دامنه ی A را به دست آورید.

(ب) عبارت گویای B را طوری بیابید که $A + B = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

(پ) عبارت گویای C را طوری بیابید که $A \times C = x^4 - 1$.

۳ قدر مطلق و جزء صحیح

۱. قدر مطلق

۱- آشنایی با قدر مطلق

$$\begin{aligned} |-3| &= 3 \\ |\sqrt{5}-2| &= \sqrt{5}-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |3| &= 3 \\ |\sqrt{5}-3| &= 3-\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |0| &= 0 \\ |\sqrt{10}-\pi| &=? \end{aligned}$$

• قدر مطلق عدد حقیقی x که با نماد $|x|$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

۲- تمرین. مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $a=\sqrt{2}$ ، $b=\sqrt{3}$ و $c=3$ حساب کنید.

$$|a-c| + |b-c| + |a+b-c|$$

۳- فرمول های قدر مطلق

- (۱) $|x| \geq 0$
- (۲) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (۳) $|x| = |-x|$
- (۴) $|x-y| = |y-x|$
- (۵) $|xy| = |x||y|$
- (۶) $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$
- (۷) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلث)
- (۸) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
- (۹) $|x| < a \Rightarrow a < x < -a \quad (a > 0)$
- (۱۰) $|x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a \quad (a > 0)$
- (۱۱) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$
- (۱۲) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a \quad (a > 0)$
- (۱۳) $x^n = y^n \Rightarrow \begin{cases} |x| = |y| & ; \text{زوج } n \\ x = y & ; \text{فرد } n \end{cases}$
- (۱۴) $x^n < y^n \Rightarrow \begin{cases} |x| < |y| & ; \text{زوج } n \\ x < y & ; \text{فرد } n \end{cases}$

- سؤال. نامساوی مثلث تحت چه شرایطی به مساوی تبدیل می شود؟

۲. جزء صحیح

۱- آشنایی با جزء صحیح

$$\begin{array}{lll} [3] = 3 & [-3] = -3 & [0] = 0 \\ [3/7] = 3 & [-3/7] = -4 & [\sqrt{10} - \pi] = ? \end{array}$$

- جزء صحیح عدد حقیقی x که با نماد $[x]$ نمایش داده می شود، برابر است با بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن.

۲- تمرین. مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $a = \sqrt{2}$ ، $b = \sqrt{3}$ و $c = 3$ حساب کنید.

$$[a-c] + [b-c] + [a+b-c]$$

۳- فرمول های جزء صحیح

$$(۱) \quad x = n + p, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq p < 1 \Rightarrow [x] = n$$

$$(۲) \quad n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = n$$

$$(۳) \quad x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$(۴) \quad [x+k] = [x] + k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(۵) \quad [x+y] \geq [x] + [y]$$

$$(۶) \quad 0 \leq x - [x] < 1$$

$$(۷) \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

$$(۸) \quad x - 1 < [x] \leq x$$

$$(۹) \quad [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(۱۰) \quad [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

$$(۱۱) \quad [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

۶ رادیکال

۱. آشنایی با رادیکال

۱- دو عدد حقیقی a و r و عدد طبیعی $n \geq 2$ را در نظر بگیرید. r ریشه n ام a است هرگاه $r^n = a$. در این صورت رادیکال a به فرجه n که با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} |r| & ; \text{زوج } n \\ r & ; \text{فرد } n \end{cases}$$

• معمولا فرجه 2 نوشته نمی شود.

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

• به $\sqrt{a}$ ، جذر a نیز گفته می شود.

۲- چند مثال

(آ) 4 و -4 ریشه های دوم 16 هستند، زیرا $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$.

$$\sqrt{16} = 4$$

(ب) 4 ریشه 4 سوم 64 است، زیرا $4^3 = 64$.

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

(پ) -4 ریشه 4 سوم -64 است، زیرا $(-4)^3 = -64$.

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

(ت) 2 و -2 ریشه های چهارم 16 هستند، زیرا $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$.

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

(ث) 2 ریشه 2 پنجم 32 است، زیرا $2^5 = 32$.

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

(ج) -2 ریشه 2 پنجم -32 است، زیرا $(-2)^5 = -32$.

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

(چ) -4 ریشه 4 دوم ندارد، زیرا وجود ندارد عدد حقیقی r به طوری که $r^2 = -4$.

$$\sqrt{-4} = ?$$

(ح) -16 ریشه 4 چهارم ندارد، زیرا وجود ندارد عدد حقیقی r به طوری که $r^4 = -16$.

$$\sqrt[4]{-16} = ?$$

۳- توجه. زیر رادیكال با فرجه ی زوج نمی‌تواند منفی باشد.

۲. فرمول های رادیكال

• اعداد حقیقی a و b و اعداد طبیعی m و n را در نظر بگیرید.

- (۱) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & ; \text{زوج } n \\ a & ; \text{فرد } n \end{cases}$
- (۲) $\sqrt{x^2} = |x|$
- (۳) $\sqrt[3]{x^3} = x$
- (۴) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- (۵) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- (۶) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$
- (۷) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- (۸) $\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$
- (۹) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \times b^n}$
- (۱۰) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (\text{رادیكال مرکب})$

• تذکر

(۱) در هر یک از فرمول های بالا، زیر رادیكال با فرجه ی زوج نمی‌تواند منفی باشد.

(۲) در استفاده از فرمول های (۸) و (۹) دقت بیشتری باید داشت. به مثال زیر توجه کنید :

$$\sqrt[3]{-4} \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-4) \times 4} = \sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{16} \neq -2$$

$$\sqrt[6]{(-4)^2 \times 4} = \sqrt[6]{64} = 2$$

۳. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم رادیكال ها

۱- برای آشنایی با جمع، تفریق، ضرب و تقسیم رادیكال ها، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$\begin{aligned} 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt{3} &= 2\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{16 \times 2} + \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{3} \\ &= 2 \times 3\sqrt{2} - 3 \times 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= -6\sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

مثال دوم

$$\sqrt{8}-\sqrt{48}+3\sqrt{32}-2\sqrt{98}+3\sqrt{75}\stackrel{?}{=}2\sqrt{2}-4\sqrt{3}+12\sqrt{2}-14\sqrt{2}+15\sqrt{3}\stackrel{?}{=}11\sqrt{3}$$

مثال سوم

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt{128}-\sqrt[3]{128}+5\sqrt{18}=\sqrt[3]{27\times 2}-\sqrt{64\times 2}-\sqrt[3]{64\times 2}+5\sqrt{9\times 2}$$

$$\stackrel{?}{=}3\sqrt[3]{2}-8\sqrt{2}-4\sqrt[3]{2}+15\sqrt{2}\stackrel{?}{=}-\sqrt[3]{2}+7\sqrt{2}$$

مثال چهارم

$$2\sqrt{27}\times 3\sqrt{12}\stackrel{?}{=}6\sqrt{324}=6\times 18=108$$

مثال پنجم

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\stackrel{?}{=}\sqrt[6]{8}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{32}$$

مثال ششم

$$\sqrt{27a^2b^5}=\sqrt{3\times 9\times a^2\times b^4\times b}=\sqrt[3]{3}|a|\sqrt[3]{b^5}$$

مثال هفتم

$$\sqrt[3]{-81a^5b^4}=\sqrt[3]{-3\times 27\times a^3\times a^2\times b^3\times b}\stackrel{?}{=}-3ab\sqrt[3]{a^2b^2}$$

مثال هشتم

$$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}\stackrel{?}{=}\sqrt[4]{8\sqrt[3]{\sqrt[3]{32}}}\stackrel{?}{=}\sqrt[4]{8\sqrt[3]{32}}=\sqrt[4]{8^6\times 32}\stackrel{?}{=}\sqrt[4]{2^{23}}$$

مثال نهم

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{16\sqrt[3]{32}}}\stackrel{?}{=}\sqrt[4]{4\sqrt[3]{64\sqrt{2}}}\stackrel{?}{=}\sqrt[4]{16\sqrt[3]{2}}\stackrel{?}{=}2\sqrt[4]{2}$$

مثال دهم

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}\stackrel{?}{=}\sqrt{11-\sqrt{72}}\stackrel{?}{=}\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-72}}{2}}-\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-72}}{2}}\stackrel{?}{=}3-\sqrt{2}$$

مثال یازدهم

$$(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\stackrel{?}{=}(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2\stackrel{?}{=}6$$

مثال دوازدهم

$$(3+\sqrt{2})^3+(3-\sqrt{2})^3-216\stackrel{?}{=}3(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-6)\stackrel{?}{=}-126$$

۲- تمرین. عبارت های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

(آ) $\sqrt{20}-\sqrt{90}+\sqrt{160}-\sqrt{180}$

(ب) $2\sqrt[3]{189}+3\sqrt[3]{875}-7\sqrt[3]{56}$

(پ) $\sqrt{\frac{2}{36}}-3\sqrt{\frac{2}{49}}-6\sqrt{\frac{2}{25}}$

(ت) $\frac{3\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{6}}$

(ث) $\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[3]{a^2}$

(ج) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[5]{8}$

(چ) $\sqrt[5]{-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

(ح) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}\times\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$

- (خ) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$ (د) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$
- (ذ) $(\sqrt{2}-1)\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ (ر) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{3}-1}}\times\sqrt{1-\sqrt{\sqrt{3}-1}}$
- ۳ تمرین. نشان دهید:
- (آ) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}}}=3$ (ب) $\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{\dots}}}}}=6$

۴. گویا کردن مخرج کسرها

- ۱- برای آشنایی با گویا کردن مخرج کسرها، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$\frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

مثال دوم

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

مثال سوم

$$\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{\sqrt[6]{x} \times \sqrt[4]{x^2}}{x} = \frac{\sqrt[12]{x^2} \times \sqrt[12]{x^9}}{x} = \frac{\sqrt[12]{x^{11}}}{x}$$

مثال چهارم

$$\frac{6}{\sqrt{7+1}} = \frac{6}{\sqrt{7+1}} \times \frac{\sqrt{7-1}}{\sqrt{7-1}} = \frac{6(\sqrt{7-1})}{7-1} = \frac{6(\sqrt{7-1})}{6} = \sqrt{7-1}$$

مثال پنجم

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7+1}} = \frac{6}{\sqrt[3]{7+1}} \times \frac{\sqrt[3]{49-\sqrt{7}+1}}{\sqrt[3]{49-\sqrt{7}+1}} = \frac{6(\sqrt[3]{49-\sqrt{7}+1})}{7-1} = \frac{6(\sqrt[3]{49-\sqrt{7}+1})}{6} = \sqrt[3]{49-\sqrt{7}+1}$$

- ۲- تمرین. مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

- (آ) $\frac{3}{\sqrt{12}}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt[4]{72}}$
- (پ) $\frac{2+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (ت) $\frac{8-x}{\sqrt[3]{x+2}}$
- (ث) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}$

۳- تمرین. عبارت های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(أ) \quad \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - 3 \quad (ب) \quad \frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{19}} + \frac{1}{\sqrt{19}+5}$$

۴- تمرین. مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x=\sqrt{2}$ حساب کنید.

$$\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9}{1+x}$$

۵. توان گویا و توان گنگ

۱- آشنایی با توان گویا

• برای آشنایی با توان گویا، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

$$5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 \Rightarrow 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2/9240177382$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1/4142135624$$

• عدد حقیقی مثبت a ، عدد صحیح m و عدد طبیعی n را در نظر بگیرید.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

• توجه. فرمول های توان برای توان گویا نیز برقرار هستند.

۲- آشنایی با توان گنگ

• برای آشنایی با توان گنگ، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

$$\sqrt{2} \approx 1/4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \Rightarrow 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7} \approx 4/6555367217$$

$$\sqrt{2} \approx 1/41 = \frac{141}{100} \Rightarrow 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}} \approx 4/7069650017$$

$$3^{\pi} \approx 31/5442807002$$

• عدد حقیقی مثبت a و عدد گنگ x را در نظر بگیرید. برای محاسبه ی a^x از تقریب های با دقت های گوناگون x استفاده می شود.

• توجه. فرمول های توان برای توان گنگ نیز برقرار هستند.

۳- چند مثال
مثال اول

$$8^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

مثال دوم

$$(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$$

مثال سوم

$$(7^{\sqrt{6}+2})^{\sqrt{6}-2} = 7^{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$$

مثال چهارم

$$(\sqrt{17+4})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times (\sqrt{17-4})^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = (\sqrt{17+4})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times (\sqrt{17-4})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$$

۴- تمرین. عبارت های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

(آ) $4096^{\frac{5}{6}}$

(ب) $\frac{5^{\sqrt{6}+1} \times 25^{\sqrt{6}-1}}{125^{\sqrt{6}}}$

(ب) $(2^{\sqrt{13}-1})^{\sqrt{13}+1}$

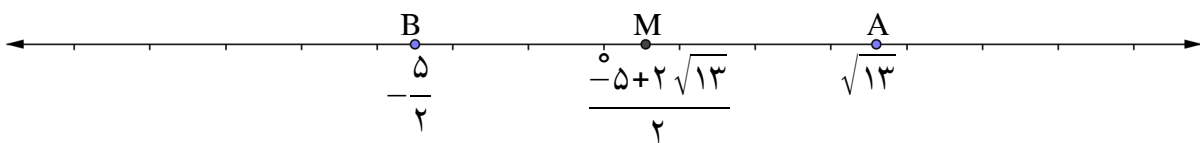
(ت) $(7+4\sqrt{3})^{\sqrt{6}} \times (2-\sqrt{3})^{\sqrt{24}}$

۵- تمرین. مقدار مثبت x را طوری بیابید که $x^{\sqrt{8}} = 3$.

۵ دستگاه محورهای مختصات و خط

۱. محور اعداد حقیقی

۱- نمایش اعداد حقیقی روی محور



- هر محور دارای نقطه ی شروع، واحد اندازه گیری و جهت است.
- بین مجموعه ی نقاط محور اعداد حقیقی و مجموعه ی اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد، به عبارت دیگر هر نقطه روی محور اعداد حقیقی نشان دهنده ی یک و فقط یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی را نیز می توان با یک و فقط یک نقطه روی محور اعداد حقیقی نشان داد.
- ۲- دو نقطه ی A و B را روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید.
- اندازه ی جبری AB که با نماد $\overline{AB}$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

- طول پاره خط AB که با نماد $|AB|$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

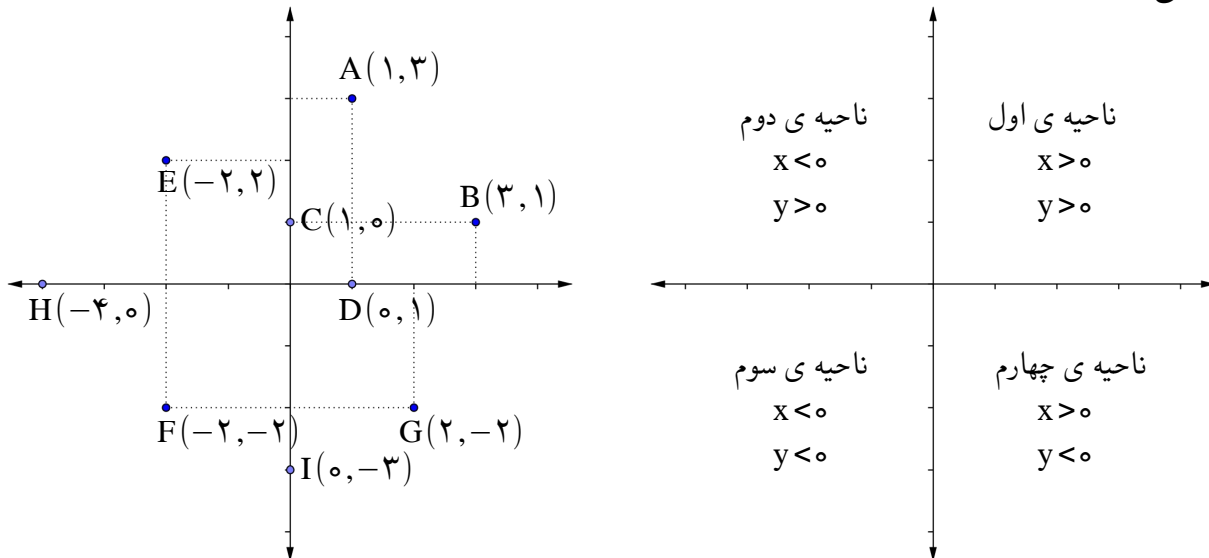
- طول نقطه ی M وسط پاره خط AB برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

- ۳- تمرین. اگر $x_A = 1$ و $x_B = -4$ ، طول نقطه ی C را طوری بیابید که $\overline{AB} - 2\overline{BC} = 3\overline{AC}$.

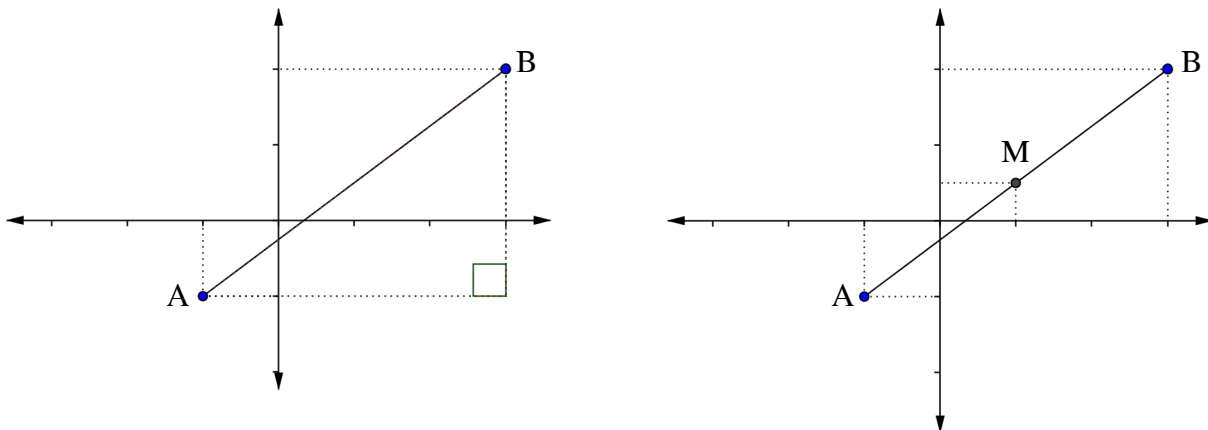
۲. دستگاه مختصات قائم دکارتی

۱- مدرج کردن صفحه



• دستگاه مختصات قائم دکارتی، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند.

۲- طول پاره خط و نقطه ی وسط پاره خط

• طول پاره خط AB که با نماد $|AB|$ نمایش داده می‌شود، برابر است با :

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

• نتیجه. فاصله ی نقطه ی A از مبدأ مختصات برابر است با :

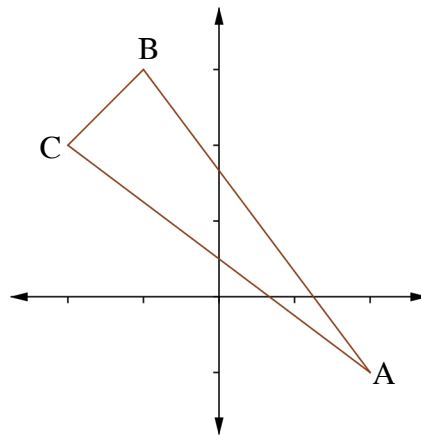
$$|OA| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

• مختصات نقطه ی M وسط پاره خط AB برابر است با :

$$M \left| \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right.$$

۳- مثال. مثلث ABC با سه رأس $A(2, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(-2, 2)$ را در نظر بگیرید.

- (آ) مثلث را رسم کنید.
 (ب) محیط مثلث را به دست آورید.
 (پ) نوع مثلث را مشخص کنید.
 حل.
 (آ)



(ب)

$$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

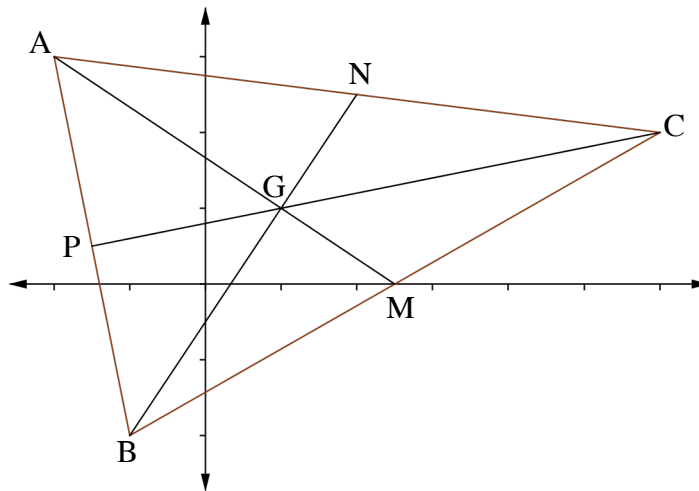
$$|AC| = 5$$

$$|BC| = \sqrt{2}$$

$$\text{محیط مثلث} = 5 + 5 + \sqrt{2} = 10 + \sqrt{2}$$

- (پ) مثلث متساوی الساقین است.
 ۴- تمرین. مربع ABCD با دو رأس مقابل $A(8, 6)$ و $B(2, -2)$ را در نظر بگیرید.
 (آ) مختصات مرکز مربع را به دست آورید.
 (ب) مساحت مربع را به دست آورید.
 (پ) محیط مربع را به دست آورید.

۵- مرکز ثقل مثلث



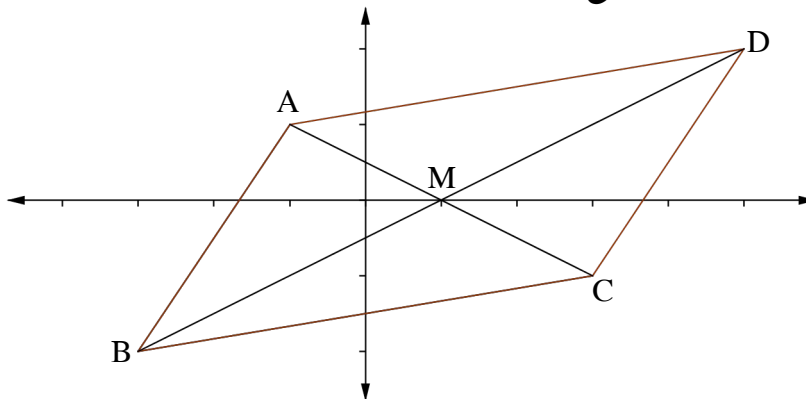
• به نقطه ی همرسی میانه های مثلث ABC، مرکز ثقل آن گفته می شود و مختصات آن برابر است با :

$$G \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

• سؤال. درباره ی مرکز ثقل مثلث و کاربردهای آن چه می دانید؟

۶- تمرین. مختصات مرکز ثقل مثلث ABC با سه راس $A(2, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $(-2, 2)$ را به دست آورید.

۷- رابطه ی بین راس های متوازی الاضلاع

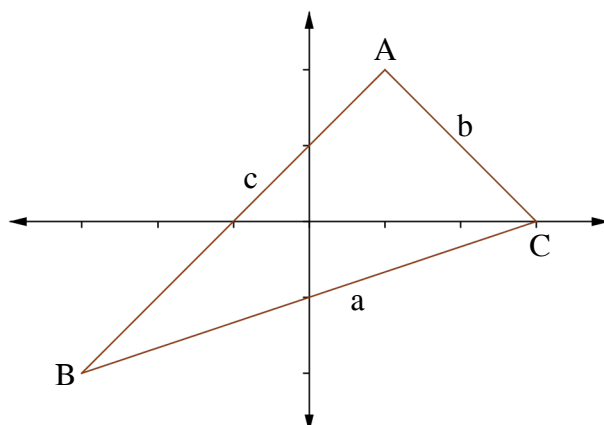


• بین راس های متوازی الاضلاع ABCD، رابطه ی زیر برقرار است :

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

۸- تمرین. نقاط $(1, -1)$ ، $(3, 2)$ و $(2, 4)$ سه راس یک متوازی الاضلاع هستند. مختصات راس چهارم آن را به دست آورید. چند حالت وجود دارد؟ چرا؟

۹- دو فرمول جالب برای مساحت مثلث



$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{که در آن}$$

۱۰- تمرین. مساحت مثلث ABC با سه راس $A(2, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(-2, 2)$ را به دست آورید.

۱۱- تمرین. مساحت مثلث ABC با سه ضلع به اندازه های ۳، ۵ و ۶ چقدر است؟

۳. آشنایی با خط

-۱ معادله ی خط

- معادله ی خط به یکی از فرم‌های زیر نوشته می شود.

(۱) فرم استاندارد

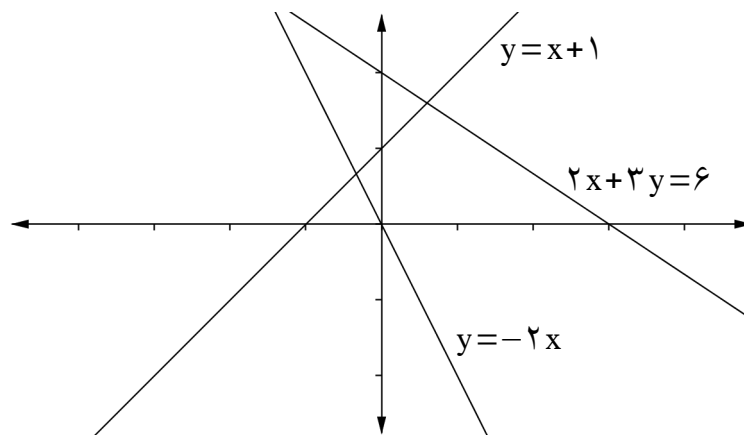
$$y = ax + b$$

(۲) فرم کلی

$$ax + by = c \quad \text{یا} \quad ax + by + c = 0$$

-۲ تمرین. معادله ی خط $6x + 15y = 21$ را به فرم استاندارد بنویسید.

-۳ نمودار خط



- برای رسم نمودار خط کافی است دو نقطه ی آن را به دست آورده، به هم وصل کرده و از دو طرف امتداد دهیم.

- به طول نقطه ی تلاقی خط با محور x ها، طول از مبدأ گفته می شود.

- به عرض نقطه ی تلاقی خط با محور y ها، عرض از مبدأ گفته می شود.

-۴ تمرین. نمودار خط‌های زیر را رسم کنید.

(آ) $y = -2x + 3$

(ب) $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$

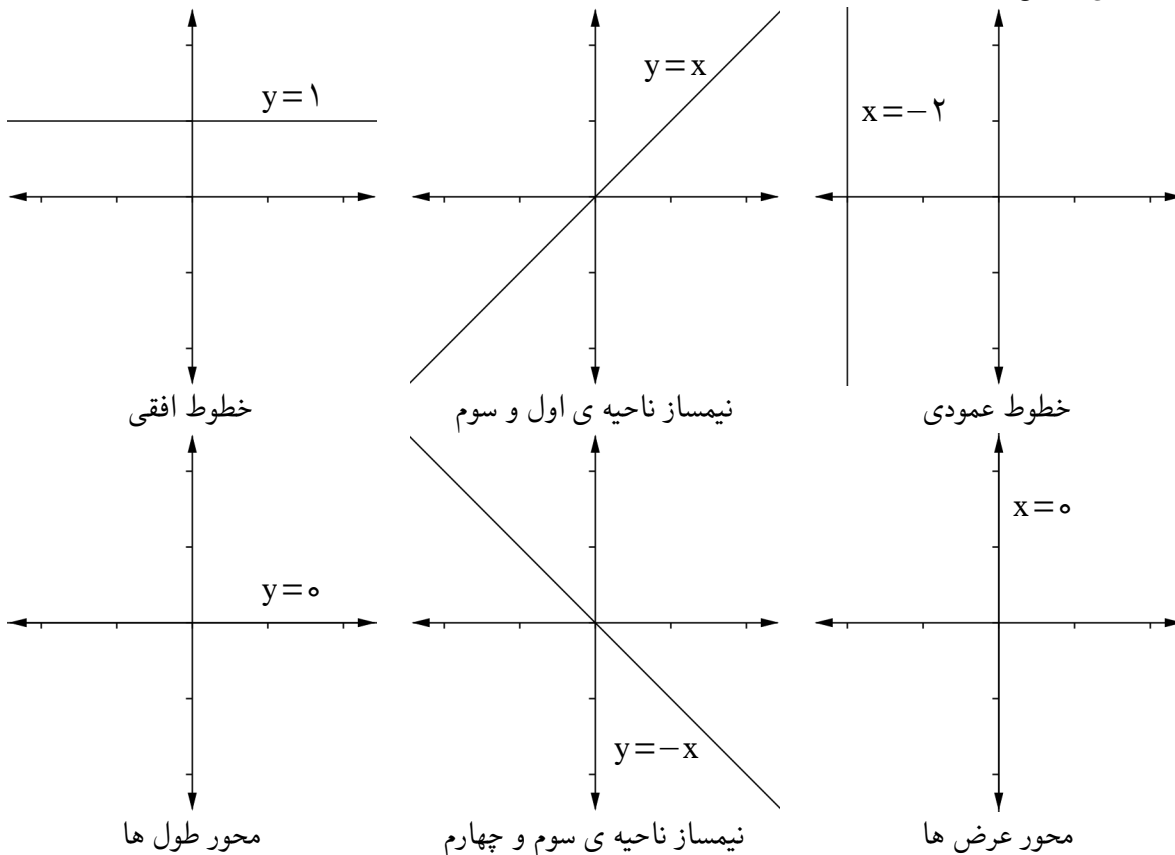
(پ) $2x - 3y = 6$

(ت) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

(ث) $3x - 4 = 8$

(ج) $11 = 2y + 3$

۵- حالت‌های خاص خط



۶- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که نقطه ی $A(3k-6, k+2)$ ،

(آ) روی محور طول ها باشد.

(ب) روی محور عرض ها باشد.

(پ) روی نیمساز ناحیه ی اول و سوم باشد.

(ت) روی نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم باشد.

(ث) روی خط به معادله ی $7x-5y=12$ باشد.

۷- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که خط به معادله ی $kx+(1-k)y=2$ از نقطه ی $(-2, 1)$ بگذرد.

۸- تمرین. نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

(آ) $3xy - y^2 = 2y$

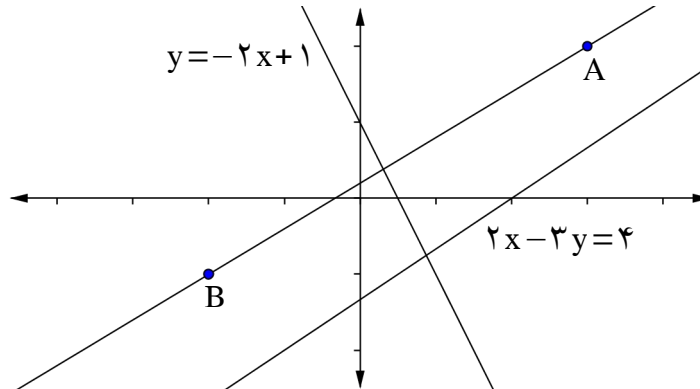
(ب) $2xy + x^2 = x$

(پ) $(x-2y)^2 = 9$

(ت) $|x+y|=2$

۴. شیب خط

۱- آشنایی با شیب خط



- شیب خط گذرنده از دو نقطه ی A و B برابر است با :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- اگر معادله ی خط به فرم استاندارد $y = ax + b$ باشد، آنگاه شیب آن برابر است با :

$$m = a$$

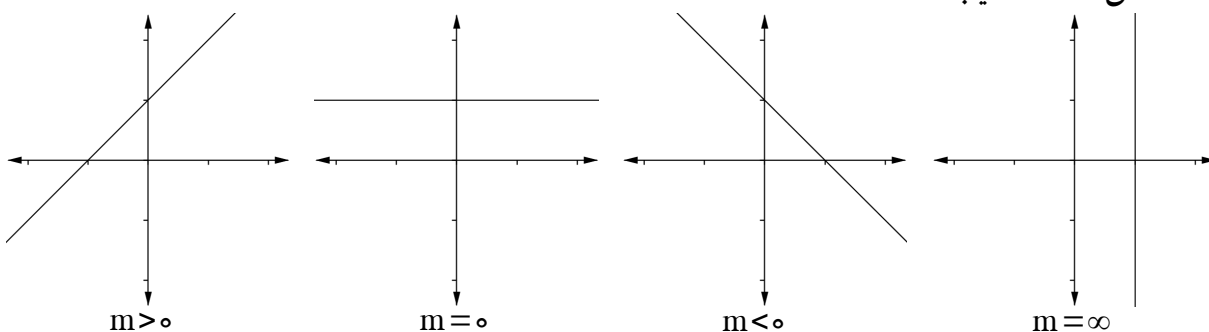
- اگر معادله ی خط به فرم کلی $ax + by = c$ باشد، آنگاه شیب آن برابر است با :

$$m = -\frac{a}{b}$$

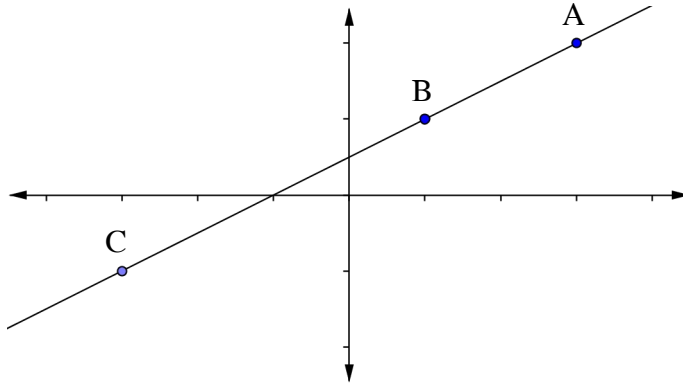
۲- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که شیب خط گذرنده از دو نقطه ی $A(2, 1-k)$ و $B(k+1, 3)$ برابر $\frac{3}{4}$ باشد.

۳- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که شیب خط به معادله ی $(k^2 - 3)x + (1 - k)x = 5$ برابر ۱ باشد.

۴- حالت‌های مختلف شیب خط

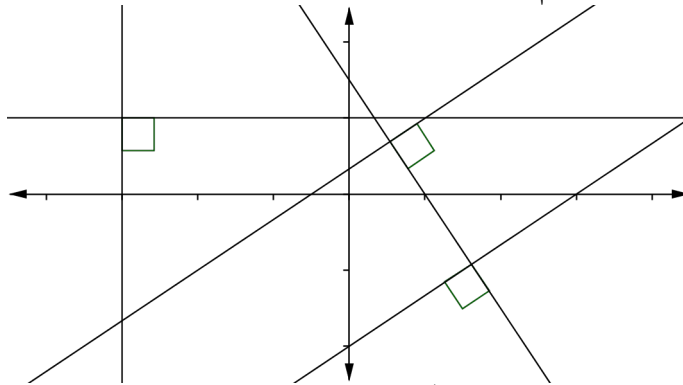


۵- سه نقطه ی A ، B و C بر روی یک خط راست قرار دارند هرگاه $m_{AB} = m_{BC}$.



۶- تمرین. نشان دهید سه نقطه ی $A(1, -1)$ ، $B(2, 2)$ و $C(4, 8)$ بر روی یک خط راست قرار دارند.

۷- خط‌های موازی و خط‌های عمود بر هم



- دو خط L و L' با هم موازی هستند هرگاه شیب آنها با هم برابر باشد، یعنی $m = m'$.
- دو خط L و L' عمود بر هم هستند هرگاه شیب آنها برعکس و قرینه ی هم باشد، یعنی $m' = -\frac{1}{m}$.

۸- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که دو خط $y = -\frac{2}{3}x + 4$ و $(k-1)x + (k+1)y = 2$ موازی هم باشند.

۹- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که خط $-kx + (3k-2)y = 8$ بر نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم عمود باشد.

۱۰- تمرین. نشان دهید سه نقطه ی $A(3, 1)$ ، $B(-3, -3)$ و $C(-5, 0)$ راس های یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۱۱- وضعیت دو خط نسبت به هم

- دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ ،

$$(1) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{با هم موازی هستند هرگاه}$$

$$(2) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{منطبق بر هم هستند هرگاه}$$

$$(3) \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \quad \text{با هم متقاطع هستند هرگاه}$$

$$(۴) \quad \text{عمود بر هم هستند هرگاه } \frac{a}{a'} = -\frac{b}{b'}$$

۱۲- تمرین. در هر یک از قسمت‌های زیر، دو خط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی را دارند؟

$$(آ) \quad \begin{cases} ۴x+۶y=۳ \\ ۶x+۹y=۵ \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} ۶x+۹y=۱۱ \\ ۳x-۲y=۷ \end{cases}$$

۱۳- تمرین. مقادیر a و b را طوری بیابید که دو خط $۲x+۳y=۵$ و $(a+b)x+۲by=۱۰$ منطبق بر هم شوند.

۱۴- تمرین. به ازای کدام مقدار k ، سه خط $y=۲x-۳$ ، $۳x+۲y=۱$ و $(۳k-۲)x+(۲k+۳)y=۵$ از یک نقطه می‌گذرند؟

۱۵- تمرین. به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی k ، خط‌های $(۱۱k-۶)x+(۵-۹k)y+۵k-۳=۰$ از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرند. مختصات آن نقطه را بیابید.

۵. روش محاسبه‌ی معادله‌ی خط

۱- معادله‌ی خط با شیب m و گذرنده از نقطه‌ی A برابر است با :

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

۲- چند مثال

مثال اول

معادله‌ی خط با شیب ۲ و گذرنده از نقطه‌ی $A(۳, ۱)$ را بیابید.
حل.

$$y - ۱ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y - ۱ = ۲x - ۶ \Rightarrow y = ۲x - ۶ + ۱ \Rightarrow y = ۲x - ۵$$

مثال دوم

معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۵, ۱)$ و $B(۲, -۱)$ را بیابید.
حل.

$$m = \frac{۱ - (-۱)}{۵ - ۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$y - ۱ = \frac{۲}{۳}(x - ۵) \Rightarrow ۳(y - ۱) = ۲(x - ۵) \Rightarrow ۳y - ۳ = ۲x - ۱۰ \Rightarrow ۲x - ۳y = ۷$$

مثال سوم

معادله‌ی خطی را بیابید که از نقطه‌ی $A(۳, -۲)$ گذشته و با خط $۲x+y=۳$ موازی باشد.
حل.

$$m = -\frac{۲}{۱} = -۲$$

$$y - (-۲) = -۲(x - ۳) \Rightarrow y + ۲ = -۲x + ۶ \Rightarrow y = -۲x + ۴$$

این مثال را به روش زیر نیز می‌توان حل کرد.

$$2x + y = 2(3) + (-2) = 4 \Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow y = -2x + 4$$

مثال چهارم

معادله ی خطی را بیابید که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کرده و بر خط $y = -\frac{3}{4}x + 17$ عمود باشد.

حل.

$$A(0, 5) \quad m = \frac{4}{3}$$

$$y - 5 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

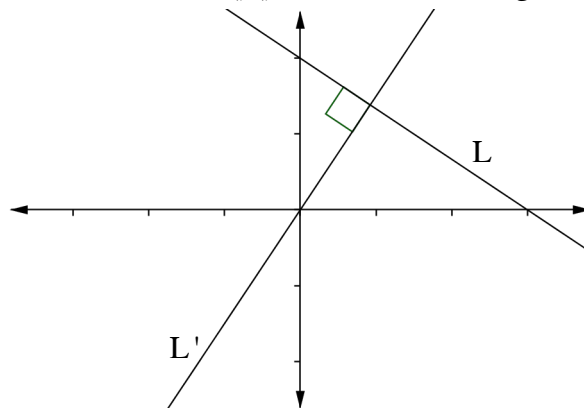
۳- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(5, 8)$ گذشته و با نیمساز ناحیه ی اول و سوم موازی باشد.

۴- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که بر خط $2x - 3y = 5$ عمود باشد و خط $y = x + 4$ را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کند.

۵- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(10, 20)$ گذشته و بر خط $y = 5$ عمود باشد.

۶- تمرین. مقادیر a و b را طوری بیابید که خط $(2a - b)x + (a + 2b - 4)y - a - 3b - 1 = 0$ موازی محور y ها باشد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

۷- تمرین. با توجه به شکل زیر، معادله ی دو خط L و L' را بیابید.

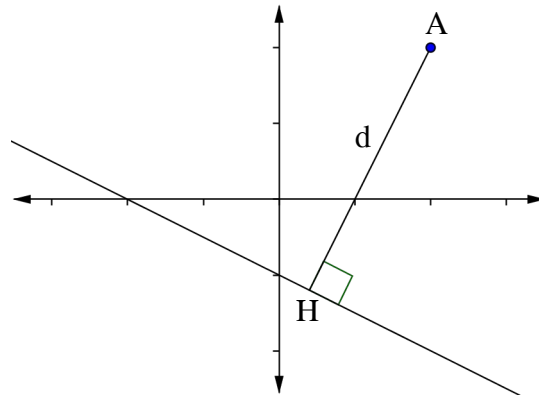


۸- تمرین. نشان دهید معادله ی خط با طول از مبدأ a و عرض از مبدأ b برابر است با :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

۶. فاصله ی نقطه از خط

۱- آشنایی با فاصله ی نقطه از خط



• فاصله ی نقطه ی A از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• نتیجه. فاصله ی مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۲- مثال. فاصله ی نقطه ی $A(2, 1)$ را از خط $6x - 8y = 19$ به دست آورید.
حل.

$$6x - 8y = 19 \Rightarrow 6x - 8y - 19 = 0$$

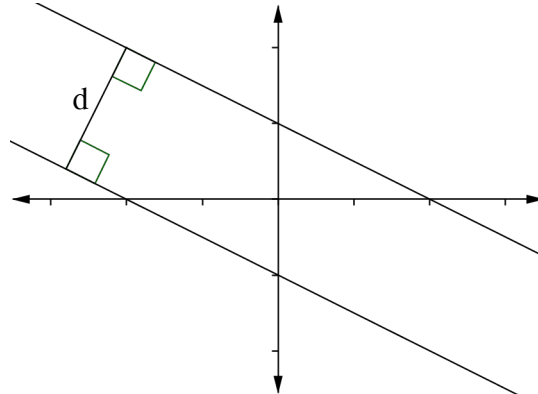
$$d = \frac{|6(2) - 8(1) - 19|}{\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

۳- تمرین. نقطه ی $A(4, 7)$ یک راس مربعی است که یک ضلع آن بر روی خط $3x + 4y = 20$ قرار دارد. محیط و مساحت آن را به دست آورید.

۴- تمرین. دو نقطه ی $A(1, -3)$ و $B(5, 5)$ را در نظر بگیرید. فاصله ی مبدأ مختصات از عمود منصف پاره خط AB چقدر است؟

۷. فاصله ی بین دو خط موازی

۱- آشنایی با فاصله ی بین دو خط موازی

• فاصله ی بین دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با :

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۲- مثال. فاصله ی بین دو خط موازی $4x-2y=1$ و $6x-3y+1=0$ را به دست آورید.
حل.

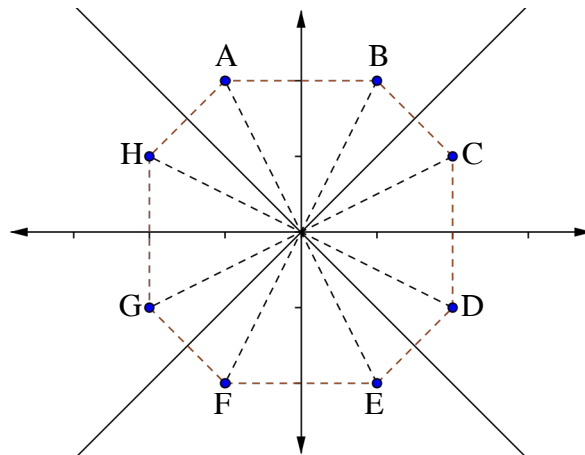
$$4x-2y=1 \Rightarrow 2x-y-\frac{1}{2}=0$$

$$6x-3y+1=0 \Rightarrow 2x-y+\frac{1}{3}=0$$

$$d = \frac{\left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

۳- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که فاصله ی بین دو خط موازی $3x+4y=2$ و $6x+8y=k$ برابر ۱ شود.

۸. تقارن



۱- تقارن نسبت به نقطه

- (۱) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات برابر است با نقطه‌ی $(-x_A, -y_A)$.
- (۲) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M برابر است با نقطه‌ی $(2x_M - x_A, 2y_M - y_A)$.

۲- تقارن نسبت به خط

- (۱) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور طول‌ها برابر است با نقطه‌ی $(x_A, -y_A)$.
- (۲) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور عرض‌ها برابر است با نقطه‌ی $(-x_A, y_A)$.
- (۳) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم برابر است با نقطه‌ی (y_A, x_A) .
- (۴) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم برابر است با نقطه‌ی $(-y_A, -x_A)$.
- (۵) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط $x=a$ برابر است با نقطه‌ی $(2a - x_A, y_A)$.
- (۶) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط $y=b$ برابر است با نقطه‌ی $(x_A, 2b - y_A)$.
- (۷) قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط $y=mx+b$ برابر است با نقطه‌ی

$$\left(\frac{(1-m^2)x_A + 2m(y_A - b)}{m^2 + 1}, \frac{2mx_A + (m^2 - 1)y_A + 2b}{m^2 + 1} \right).$$

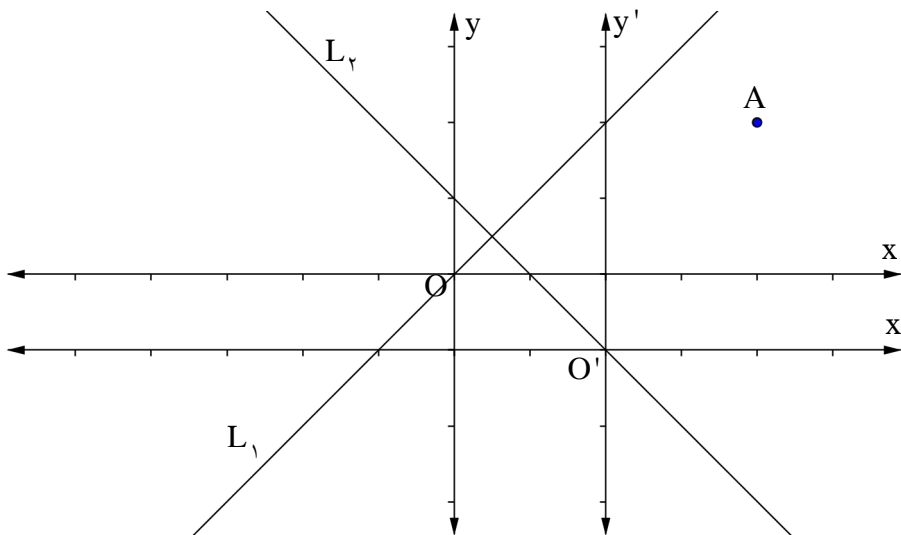
۳- تمرین

- نقطه‌ی $A(-2, 3)$ را در نظر بگیرید.
 - (آ) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.
 - (ب) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی $M(2, 1)$ به دست آورید.
 - (پ) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور طول‌ها به دست آورید.
 - (ت) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور عرض‌ها به دست آورید.
 - (ث) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم به دست آورید.
 - (ج) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم به دست آورید.
 - (چ) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط $x=2$ به دست آورید.

- (ح) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط $y=2$ به دست آورید.
 (خ) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط $y=3x+2$ به دست آورید.

۹. انتقال محوره‌ای مختصات

۱- آشنایی با انتقال محوره‌ای مختصات



- نقطه‌ی $A(x, y)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر بگیرید. محوره‌ای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه‌ی $O'(\alpha, \beta)$ منتقل شود. اگر مختصات این نقطه در دستگاه مختصات جدید $x'o'y'$ باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

- ۲- تمرین. در شکل بالا، مختصات نقطه‌ی A و معادله‌ی دو خط L_1 و L_2 را ابتدا در دستگاه مختصات xoy و سپس در دستگاه مختصات $x'o'y'$ به دست آورید.
- ۳- مثال. خط $11x - 7y = 10$ را در نظر بگیرید. محوره‌ای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه‌ی $O'(1, 2)$ منتقل شود. معادله‌ی خط را در دستگاه مختصات جدید به دست آورید.
 حل.

$$x' = x - 1 \Rightarrow x = x' + 1$$

$$y' = y - 2 \Rightarrow y = y' + 2$$

$$11x - 7y = 10 \Rightarrow 11(x' + 1) - 7(y' + 2) = 10 \Rightarrow 11x' + 11 - 7y' - 14 = 10 \Rightarrow 11x' - 7y' = 13$$

- ۴- تمرین. خط $4x + 6y = 7$ را در نظر بگیرید. محوره‌ای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه‌ی $O'(3, -2)$ منتقل شود. معادله‌ی خط را در دستگاه مختصات جدید به دست آورید.

۶ معادله و نامعادله

۱. آشنایی با معادله

۱- به معادله ی زیر توجه کنید :

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow (2)^3 - 3(2)^2 - 4(2) + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

• به $x = 2$ یک جواب این معادله گفته می شود. آیا این معادله جواب های دیگری هم دارد؟

• به جواب معادله، معمولا ریشه گفته می شود.

۲- تمرین. معادله ی زیر را در نظر بگیرید.

$$x + \sqrt{22 - x} = 2$$

(آ) آیا $x = -3$ یک ریشه ی این معادله است؟ چرا؟

(ب) آیا $x = 6$ یک ریشه ی این معادله است؟ چرا؟

۲. معادله ی درجه ی اول

۱- آشنایی با معادله ی درجه ی اول

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

۲- حل معادله ی درجه ی اول

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

۳- چند مثال

مثال اول

$$2(x+2) + 3(2x-1) = 17 \Rightarrow 2x + 4 + 6x - 3 = 17 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{8} = 2$$

مثال دوم

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-4}{3} \Rightarrow 12 \left(\frac{x+1}{4} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow 3(x+1) - 2(x-1) = 4(x-4) \Rightarrow 3x + 3 - 2x + 2 = 4x - 16 \Rightarrow -3x = -21 \Rightarrow x = \frac{-21}{-3} = 7$$

مثال سوم

$$(x+4)(x-2)-(x-3)(x+3)=1 \Rightarrow x^2+2x-8-x^2+9=1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{2}=0$$

۴- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$(أ) \quad \frac{3x+4}{5} + \frac{x+8}{10} = \frac{11x+23}{15}$$

$$(ب) \quad \frac{x+1}{3} - \frac{1-x}{4} = \frac{x+2}{5}$$

$$(پ) \quad (2x+3)(3x-2)-6x(x+1)+x=6 \quad (ت) \quad (x+1)(x-2)-(x+2)(x-3)=4$$

۵- تمرین. مجموع پنج عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۱۲۵ است. این عددها را پیدا کنید.

۶- تمرین. یک فروشنده تعدادی کیف یکسان دارد. اگر هر کدام از آنها را به قیمت ۴۵۰۰۰ تومان بفروشد، ۵۰۰۰۰۰ تومان ضرر می کند و اگر هر کدام از آنها را به قیمت ۶۰۰۰۰ تومان بفروشد، ۱۰۰۰۰۰۰ تومان سود می کند. تعداد کیف ها و قیمت خرید هر کیف چقدر است؟

۳. دستگاه دو معادله ی دو مجهولی خطی

۱- آشنایی با دستگاه دو معادله ی دو مجهولی خطی

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

۲- روش حذفی

• برای آشنایی با روش حذفی، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\begin{cases} 3x+2y=21 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3x+2y=21) \\ 2(2x-3y=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+6y=63 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 13x=65 \Rightarrow x=5 \quad \Rightarrow 15+2y=21 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$$

۳- تمرین. دستگاه های زیر را به روش حذفی حل کنید.

$$(أ) \quad \begin{cases} 5x+3y=6 \\ 4x-2y=7 \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 17x+15y=2 \\ 13x-7y=20 \end{cases}$$

۴- روش جای گذاری

• برای آشنایی با روش جای گذاری، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\begin{cases} x+2y=85 \\ 5x-3y=9 \end{cases} \Rightarrow x=85-2y \Rightarrow 5(85-2y)-3y=9 \Rightarrow 425-10y-3y=9 \Rightarrow 13y=416 \Rightarrow y=32 \Rightarrow x=85-64=21$$

۵- تمرین. دستگاه های زیر را به روش جای گذاری حل کنید.

$$(أ) \quad \begin{cases} 3x-y=40 \\ 2x+3y=67 \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

۶- تمرین. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = 4 \\ \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} = 19 \end{cases}$$

۷- تمرین. طول مستطیلی از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط آن ۴۸ سانتی متر باشد، مساحت آن چند سانتی متر مربع است؟

۸- تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله ی دو مجهولی خطی

$$\bullet \text{ دستگاه } \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$(۱) \quad \text{فقط یک جواب دارد هرگاه } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

$$(۲) \quad \text{جواب ندارد هرگاه } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$(۳) \quad \text{بی شمار جواب دارد هرگاه } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

۹- تمرین. تعداد جواب‌های دستگاه‌های زیر را به دست آورید.

$$(أ) \quad \begin{cases} 27x + 39y = 125 \\ 32x - 43y = 200 \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 108x - 162y = 220 \\ -64x + 96y = -120 \end{cases}$$

۱۰- تمرین. مقادیر a و b را طوری بیابید که دستگاه زیر بی شمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} (a+b)x + 2ay = 3 \\ 2bx + (a-2b-3)y = 12 \end{cases}$$

۴. دستگاه سه معادله ی سه مجهولی خطی

۱- آشنایی با دستگاه سه معادله ی سه مجهولی خطی

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

۲- تمرین. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$(أ) \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=9 \end{cases} \quad (ب) \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=4 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

۳- تمرین. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

۵. معادله ی درجه ی دوم

۱- آشنایی با معادله ی درجه ی دوم

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

• در حالت‌های زیر، معادله ی درجه ی دوم ناقص است.

$$ax^2+bx=0$$

$$ax^2+c=0$$

$$ax^2=0$$

۲- حل معادله ی درجه ی دوم به روش تجزیه

• برای آشنایی با حل معادله ی درجه ی دوم به روش تجزیه، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.
مثال اول

$$4x^2-6x=0 \Rightarrow x(4x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x-6=0 \Rightarrow 4x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

مثال دوم

$$4x^2-9=0 \Rightarrow (2x-3)(2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

این معادله را به روش زیر نیز می‌توان حل کرد.

$$4x^2-9=0 \Rightarrow 4x^2=9 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$$

مثال سوم

$$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x + 15)(x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 15 = 0 \Rightarrow x = -15 \\ x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

مثال چهارم

$$3x^2 + 7x + 4 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 7(3x) + 12 = 0 \Rightarrow (3x + 3)(3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

مثال پنجم

$$25x^2 + 30x + 9 = 0 \Rightarrow (5x + 3)^2 = 0 \Rightarrow 5x + 3 = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

-۳ تمرین. معادله های زیر را به روش تجزیه حل کنید.

(آ) $x^2 + 6x - 55 = 0$

(ب) $4x^2 + 9 = 0$

(پ) $9x^2 + 15x - 14 = 0$

(ت) $3x^2 - 8x + 5 = 0$

(ث) $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) - 24 = 0$

(ج) $(3x - 2)^2 + (2x + 1)^2 + (1 - 5x)^2 = 0$

-۴ تمرین. مقدار k را طوری بیابید که معادله ی زیر دو ریشه ی قرینه ی هم داشته باشد. سپس ریشه های آن را به دست آورید.

$$(k+1)x^2 - (6-3k)x - 12k = 0$$

-۵ تمرین. مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی زیر برابر صفر باشد. سپس ریشه ی دیگر آن را به دست آورید.

$$kx^2 + (1-k)x + 2k - 3 = 0$$

-۶ حل معادله ی درجه ی دوم به روش مربع کامل

• برای آشنایی با حل معادله ی درجه ی دوم به روش مربع کامل، به مثال های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 16 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x+3 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x+3=5 \Rightarrow x=2 \\ x+3=-5 \Rightarrow x=-8 \end{cases}$$

مثال دوم

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = -2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \\ x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

مثال سوم

$$-4x^2 + 8x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -\frac{3}{4} + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

-۷ تمرین. معادله های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

(آ) $x^2 - 8x - 9 = 0$

(ب) $x^2 + 4x + 2 = 0$

(پ) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

(ت) $x(5 - 2x) = 2$

-۸ حل معادله ی درجه ی دوم به روش دلتا

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

• حالت اول. $\Delta > 0$ ، معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز زیر است :

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• حالت دوم. $\Delta = 0$ ، معادله دارای ریشه ی مضاعف زیر است :

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

• حالت سوم. $\Delta < 0$ ، معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

۹- چند مثال
مثال اول

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

مثال دوم

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{-6}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

مثال سوم

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \text{معادله ریشه ی حقیقی ندارد.}$$

مثال چهارم

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

۱۰- تمرین. معادله های زیر را به روش دلتا حل کنید.

(آ) $3x^2 + 5x - 12 = 0$

(ب) $x^2 - 8x - 48 = 0$

(پ) $49x^2 + 42x + 9 = 0$

(ت) $31x^2 - 29x + 7 = 0$

۱۱- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی $(k+2)x^2 - 4kx - k - 3 = 0$ برابر ۲ باشد، سپس ریشه ی دیگر آن را به دست آورید.

۱۲- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که معادله ی $kx^2 - 2(k-1)x + k = 0$ ریشه ی مضاعف داشته باشد، سپس ریشه ی مضاعف آن را به دست آورید.

۱۳- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که معادله ی $x^2 + 2x + 3 - k = 0$ دو ریشه ی حقیقی متمایز داشته باشد.

۱۴- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که معادله ی $3x^2 + (k+1)x + 3 = 0$ ریشه ی حقیقی نداشته باشد.

۱۵- تمرین. در تعداد جواب های معادله ی درجه ی دوم زیر بر حسب مقادیر a ، b و c بحث کنید.

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

۱۶- دو حالت خاص معادله ی درجه ی دوم

$$(۱) \quad a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$(۲) \quad a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

۱۷- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$(آ) \quad 31x^2 - 23x - 8 = 0$$

$$(ب) \quad 23x^2 + 50x + 29 = 0$$

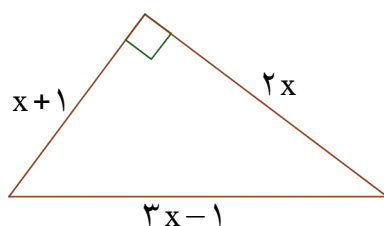
$$(پ) \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$(ت) \quad (\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2\sqrt{2} = 0$$

۱۸- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی $2kx^2 + (k+2)x + k - 4 = 0$ برابر ۱- باشد، سپس ریشه ی دیگر آن را به دست آورید.

۱۹- تمرین. طول مستطیلی از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر مساحت آن ۱۳۵ سانتی متر مربع باشد، محیط آن چند سانتی متر است؟

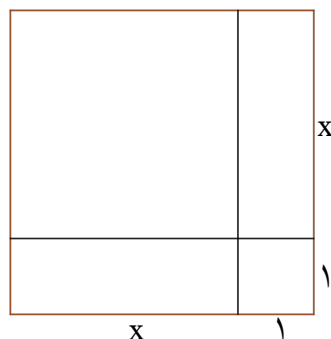
۲۰- تمرین. در مثلث قائم الزاویه ی زیر، مقدار x را به دست آورید.



۲۱- حل معادله ی درجه ی دوم به روش خوارزمی

• برای آشنایی با حل معادله ی درجه ی دوم به روش خوارزمی، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \frac{2}{2} = 1$$



$$x^2 + 2x + 1 = 15 + 1 = 16 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

• به روش خوارزمی، فقط ریشه ی مثبت معادله به دست می آید.

۲۲- تمرین. معادله های زیر را به روش خوارزمی حل کنید.

$$(آ) \quad x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(ب) \quad x^2 + 5x - 14 = 0$$

۶. روابط بین ریشه های معادله ی درجه ی دوم

۱- اگر α و β ریشه های معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن گاه :

$$(۱) \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$(۲) \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$(۳) \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$(۴) \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$(۵) \quad \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$(۶) \quad \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$$

۲- تمرین. α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ می باشند. مقدارهای زیر را حساب کنید.

$$(آ) \quad \frac{\alpha}{\beta+2} + \frac{\beta}{\alpha+2}$$

$$(ب) \quad \alpha^2(\alpha+2) + \beta^2(\beta+2)$$

$$(پ) \quad \alpha^4 + \beta^4$$

$$(ت) \quad \alpha^6 + \beta^6$$

$$(ث) \quad \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

$$(ج) \quad \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$$

۳- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی $x^2 - 16x + k + 5 = 0$ سه واحد از ریشه ی دیگر آن بیشتر باشد.

۴- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی $x^2 - (k+2)x + 15 = 0$ دو واحد از ریشه ی دیگر آن کمتر باشد.

۵- معادله ی درجه ی دومی که ریشه های آن α و β می باشند، برابر است با :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

۶- تمرین. معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن ۶- و ۴ باشند.

۷- تمرین. معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{2}{3}$ و $\frac{9}{2}$ باشند.

۸- تمرین. معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن $3 + 2\sqrt{2}$ و $3 - 2\sqrt{2}$ باشند.

۹- تمرین. معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن سه واحد کمتر از دو برابر ریشه های معادله ی زیر باشند.

$$x^2 + x + 2 = 0$$

۷. معادله ی قابل تبدیل به معادله ی درجه ی دوم

- ۱- برای آشنایی با معادله ی قابل تبدیل به معادله ی درجه ی دوم، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.
- $$x + \sqrt{x} = 2$$
- $$\sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 + t = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+2=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \\ t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$
- غ ق ق $\sqrt{x} = -2 \Rightarrow x = 4$
- ۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.
- (ا) $(2x-1)^2 - 10(2x-1) + 9 = 0$ (ب) $\sqrt{2x-1} + 2x - 21 = 0$

۸. معادله ی درجه ی سوم

- ۱- آشنایی با معادله ی درجه ی سوم
- حل معادله ی درجه ی سوم در حالت کلی پیچیده و نیازمند استفاده از اعداد مختلط است. با اعداد مختلط در دانشگاه آشنا خواهید شد.
- ۲- مثال
- $$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$
- $$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x - 6x + 12 = x^2(x-2) - x(x-2) - 6(x-2)$$
- $$= (x-2)(x^2 - x - 6) = (x-2)(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$
- ۳- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.
- (ا) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = 0$ (ب) $x^3 - 5x + 12 = 0$
- (پ) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ (ت) $2x^3 - 5x + 3 = 0$
- (ث) $x^3 + 2x + 3 = 0$ (ج) $x^3 + 3x + 2 = 0$

۹. معادله ی گویا**۱- آشنایی با معادله ی گویا**

- برای آشنایی با معادله ی گویا، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Rightarrow (x-1)(x+1) \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \right)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 3(x-1) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$$

- جواب‌های به دست آمده از حل معادله ی گویا در صورتی قابل قبول هستند که هیچ یک از مخرج ها را صفر نکنند.

۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$(آ) \quad \frac{x+1}{x^2+x-2} - \frac{x-3}{x+2} = \frac{x}{x-1}$$

$$(ب) \quad \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{20}{x^2-9}$$

$$(پ) \quad \frac{x^2+3}{x^2-x} - \frac{12}{x^2+x} = \frac{x-11}{1-x^2}$$

$$(ت) \quad \frac{x+2}{x-3} + \frac{4}{x} = x+3$$

۱۰. معادله ی گنگ**۱- آشنایی با معادله ی گنگ**

- برای آشنایی با معادله ی گنگ، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

- جواب‌های به دست آمده از حل معادله ی گنگ در صورتی قابل قبول هستند که در معادله صدق کنند.

۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$(آ) \quad 2x + \sqrt{8-x} = 1$$

$$(ب) \quad \sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-7}$$

$$(پ) \quad \sqrt{x+5} + \sqrt{2-x} = 1$$

$$(ت) \quad \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2$$

۱۱. معادله ی شامل قدر مطلق**۱- آشنایی با معادله ی شامل قدر مطلق**

- برای آشنایی با معادله ی شامل قدر مطلق، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$||x-1|-2|=3 \Rightarrow |x-1|-2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|-2=3 \Rightarrow |x-1|=5 \Rightarrow x-1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x-1=5 \Rightarrow x=6 \\ x-1=-5 \Rightarrow x=-4 \end{cases} \\ |x-1|-2=-3 \Rightarrow |x-1|=-1 \end{cases}$$

۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{(ب)} & |x^2 - 1| + |x^3 - 1| + |x^2 + x - 2| = 0 \\ \text{(ت)} & |x - 2| + |5 - 2x| + |4 + x| = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(آ)} & x^2 - 5|x| + 6 = 0 \\ \text{(پ)} & |x - 2| + |x - 5| = |2x - 7| \end{array}$$

۱۲. معادله ی شامل جزء صحیح

۱- آشنایی با معادله ی شامل جزء صحیح

• برای آشنایی با معادله ی شامل جزء صحیح، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$2[x] + [3 - x] = 5 \Rightarrow [x] + [x] + 3 + [-x] = 5 \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2 \\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه ی جواب معادله} = \{2\} \cup (3, 4)$$

۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{(ب)} & x + [x] = x[x] \\ \text{(ت)} & [x^2] = [x]^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(آ)} & [x]^2 - 6[x] = 72 \\ \text{(پ)} & x - [x] = \frac{1}{2} \end{array}$$

۱۳. نامساوی

۱- آشنایی با نامساوی

$$\begin{array}{llll} 6 < 9 & -6 > -7 & 8 \geq 5 & 5 \leq 5 \\ \frac{2}{3} < \frac{4}{5} & \frac{19}{7} > \sqrt{7} & \pi < \sqrt{10} & 3^{20} > 2^{30} \end{array}$$

۲- چند ویژگی نامساوی

$$\begin{array}{ll} (۱) & a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ (۲) & a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d \\ (۳) & a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc \\ (۴) & a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc \end{array}$$

۳- چند نامساوی جالب

$$\begin{array}{ll} (۱) & a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0) \\ (۲) & a + \frac{1}{a} \leq -2 \quad (a < 0) \\ (۳) & \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a, b > 0) \end{array}$$

$$(۴) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$$

- تمرین. نامساوی های (۱)، (۲) و (۳) را ثابت کنید.
- سؤال. این نامساوی ها تحت چه شرایطی به مساوی تبدیل می شوند؟

۱۴. بازه

۱- آشنایی با بازه

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$	
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x > a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} x \leq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} x < a\}$	
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	

۲- مثال

$A = [-3, 2]$	
$B = (1, 4]$	
$A \cup B = [-3, 4]$	
$A \cap B = (1, 2]$	
$A - B = [-3, 1]$	
$B - A = (2, 4]$	

۳- تمرین. مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

- (آ) $[-2, 2] \cup [-1, 4]$ (ب) $[-1, 2] \cap [-2, 4]$
 (پ) $(-\infty, 4] - [0, 2]$ (ت) $[3, 7] - (1, +\infty)$

۱۵. تعیین علامت و نامعادله

۱- تعیین علامت عبارت درجه ی اول

$$P = ax + b$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
P	مخالف علامت a o موافق علامت a		

۲- چند مثال

مثال اول

$$P = 3x - 6$$

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
P	-	o	+

مثال دوم

$$P = (-3x + 12)(x - 1)$$

$$-3x + 12 = 0 \Rightarrow -3x = -12 \Rightarrow x = 4$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	۱	۴	$+\infty$
$-۳x+۱۲$		+	+	o -
$x-۱$		- o	+	+
P		- o	+	o -

مثال سوم

$$P = \frac{3 - x}{x + 2}$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-۲	۳	$+\infty$		
$۳-x$		+	+	o	-	
$x+۲$		-	o	+	+	
P		-	∞	+	o	-

مثال چهارم

$$P = (x+1)^3(x+2)^4$$

$$x-1$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$(x+1)^r$		-		-	o	+		+
$(x+2)^r$		+	o	+		+		+
$x-1$		-		-		-	o	+
P		+	o	+	o	-	∞	+

۳- تعیین علامت عبارت درجه ی دوم

$$P = ax^2 + bx + c$$

• حالت اول. $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P	موافق علامت a o مخالف علامت a o موافق علامت a			

• حالت دوم. $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
P	موافق علامت a		موافق علامت a

• حالت سوم. $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
P		موافق علامت a

-۴ چند مثال
مثال اول

$$P = 3x^2 + 7x + 2$$

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\Delta = (7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 + 5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 - 5}{6} = -\frac{12}{6} = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
P		+	o	-	o	+	

مثال دوم

$$P = -3x^2 + 24x - 48$$

$$-3x^2 + 24x - 48 = 0$$

$$\Delta = (24)^2 - 4(-3)(-48) = 576 - 576 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24}{-6} = 4$$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
P		-	o	-	

مثال سوم

$$P = x^2 + 2x + 3$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8$$

x	$-\infty$		$+\infty$
P		+	

-۵ تمرین. عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

(ا) $\frac{|1-x|(3-6x)}{6x+3}$

(ب) $\frac{(x-1)(2-x)(x+1)}{x+2}$

(پ) $\frac{x^2-x-6}{x^2+x-6}$

(ت) $\frac{(4-x^2)(x^2-5x)}{x^2+x-2}$

۶- حل نامعادله

- برای آشنایی با حل نامعادله، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.

مثال اول

$$\frac{2x+1}{x+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x+1-x-2}{x+2} \leq 0 \Rightarrow P = \frac{x-1}{x+2} \leq 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$x-1$		-	-	o	+	
$x+2$		-	o	+	+	
P		+	∞	-	o	+

جواب نامعادله $(-2, 1]$

روش اشتباه

$$\frac{2x+1}{x+2} \leq 1 \Rightarrow 2x+1 \leq x+2 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow \text{جواب نامعادله} = (-\infty, 1]$$

تذکر. در حل نامعادله، به راحتی نمی‌توان طرفین وسطین کرد.

مثال دوم

$$\frac{2-x}{x} > 3x-2 \Rightarrow \frac{2-x}{x} - 3x+2 > 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} P = \frac{-3x^2+x+2}{x} > 0$$

$$-3x^2+x+2=0$$

$$-3x^2+x+2=0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$+\infty$			
$-3x^2+x+2$	-	o	+	+	o	-		
x	-		-	o	+	+		
P		+	o	-	∞	+	o	-

جواب نامعادله $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, 1)$

مثال سوم

$$|x-5| \leq |3+x| \Rightarrow (x-5)^2 \leq (3+x)^2 \Rightarrow x^2 + 25 - 10x \leq 9 + x^2 + 6x \Rightarrow -16x \leq -16 \Rightarrow x \geq 1$$

جواب نامعادله $[1, +\infty)$

-۷ تمرین. نامعادله های زیر را حل کنید.

(آ) $2(x-1) - 3(x+2) < x+12$

(ب) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3x+2}{8} > \frac{x}{12}$

(پ) $\frac{x+1}{x+3} \geq 1$

(ت) $\frac{x^2+1}{x+3} \geq 1$

(ث) $|2x+1| > |x+2|$

(ج) $||x|-3| < 1$

(چ) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \leq 2$

(ح) $|x-2| + |5-2x| + |4+x| \leq 6$

-۸ تمرین. دستگاه نامعادله های

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \leq 3 \\ x^2 - 2|x| - 15 > 0 \end{cases}$$

را حل کنید.

-۹ تمرین. نامعادله ی توأم $2 < \frac{x-1}{x+3} \leq 5$ را حل کنید.

-۱۰ تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که دامنه ی عبارت گویای $\frac{1}{(k+7)x^2 + (k-1)x + 1}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد.

-۱۱ عبارت $P = ax^2 + bx + c$ ،

(۱) $\left. \begin{matrix} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{matrix} \right\}$ همواره مثبت است هرگاه

(۲) $\left. \begin{matrix} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{matrix} \right\}$ همواره منفی است هرگاه

-۱۲ تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که عبارت $x^2 + (1-k)x + k+2$ همواره مثبت باشد.

۱. آشنایی با دنباله

- ۱- دنباله دسته‌ای از اشیاء (معمولاً اعداد) است که پشت سر هم قرار گرفته اند.
- ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷
- ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ...
- ۱, ۳, ۲, ۴, ۵, ۷, ۶, ۸, ...
- ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ...
- ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ...
- ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ...
- ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۶, ...
- ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, ۲۲, ...
- ۱, ۴, ۱۶, ۶۴, ۲۵۶, ۱۰۲۴, ۴۰۹۶, ۱۶۳۸۴, ...
- ۱, ۱۱, ۲۱, ۱۱۱۲, ۳۱۱۲, ۲۱۱۲۱۳, ۳۱۲۲۱۳, ۲۱۲۲۲۳, ...

۲- دنباله ی متناهی و دنباله ی نامتناهی

- یک دنباله متناهی است هرگاه پایان داشته باشد.
- یک دنباله نامتناهی است هرگاه پایان نداشته باشد.
- به دنباله ی نامتناهی به اختصار دنباله گفته می شود.

۳- تفاوت‌های دنباله و مجموعه

- در دنباله ترتیب مهم است ولی در مجموعه ترتیب مهم نیست.
- در دنباله تکرار مهم است ولی در مجموعه تکرار مهم نیست.

۴- جمله ی عمومی دنباله

- برای آشنایی با جمله ی عمومی دنباله، به مثال زیر توجه کنید.

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \dots$$

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{جمله ی اول} \quad a_2 = \sqrt{5} \quad \text{جمله ی دوم} \quad a_3 = \sqrt{8} \quad \text{جمله ی سوم} \quad a_4 = 11$$

$$a_5 = \sqrt{14} \quad a_6 = ? \quad a_7 = ? \quad \dots$$

$$a_n = \sqrt{3n-1} \quad \text{جمله ی عمومی}$$

$$a_1 = \sqrt{3 \times 1 - 1} = \sqrt{2} \quad a_4 = \sqrt{3 \times 4 - 1} = \sqrt{11} \quad a_{1000} = \sqrt{3 \times 1000 - 1} = \sqrt{2999}$$

- جمله ی عمومی یک دنباله را گاهی وقت‌ها نمی‌توان به دست آورد.

۵- تمرین

- دنباله ی $a_n = \frac{n-2}{2n+1}$ را در نظر بگیرید.

(آ) پنج جمله ی اول آن را به دست آورید.

(ب) جمله ی هفدهم آن چند است؟

(پ) جمله ی چندم آن $\frac{8}{9}$ است؟

۶- تمرین. جمله ی عمومی دنباله های زیر را به دست آورید.

(آ) $7, 12, 17, 22, 27, \dots$

(پ) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

(ث) $1, -4, 7, -10, 13, \dots$

(ب) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$

(ت) $9, 99, 999, 9999, 99999, \dots$

(ج) $0, 2, 6, 12, 20, \dots$

۷- دنباله ی بازگشتی

- برای آشنایی با دنباله ی بازگشتی، به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال اول

$$a_{n+1} = 2a_n + 3, a_1 = 4$$

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 11 + 3 = 25$$

$$a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53$$

$\vdots$

$$4, 11, 25, 53, 109, 221, 445, 893, \dots$$

مثال دوم

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$\vdots$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

۲. دنباله ی حسابی

۱- آشنایی با دنباله ی حسابی

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots$$

$$a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3 \quad a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3 \quad a_4 - a_3 = 10 - 7 = 3 \quad \dots$$

$$d = \text{قدر نسبت دنباله ی حسابی}$$

- دنباله ی حسابی، دنباله ای است که تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن مقداری ثابت است. به این مقدار ثابت، قدر نسبت دنباله ی حسابی گفته و با نماد d نمایش داده می شود.

۲- فرمول های دنباله ی حسابی

- دنباله ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید.

$$(1) \quad a_n - a_{n-1} = d$$

$$(2) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(3) \quad d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

- اگر a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند، آن گاه :

$$(۴) \quad b = \frac{a+c}{2}$$

به b واسطه ی حسابی a و c گفته می شود.

۳- چند مثال

مثال اول

در یک دنباله ی حسابی، جمله ی چهارم برابر ۲۸ و جمله ی نهم برابر ۴۳ است. دنباله را مشخص کنید.
حل.

$$d = \frac{a_9 - a_4}{9 - 4} = \frac{43 - 28}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 28 = a_1 + 9 \Rightarrow a_1 = 19$$

$$19, 22, 25, 28, 31, \dots$$

مثال دوم

مقدار k را طوری بیابید که $k-2, k+3, 4k-1$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند.
حل.

$$k+3 = \frac{k-2+4k-1}{2} \Rightarrow 2k+6 = 5k-3 \Rightarrow -3k = -9 \Rightarrow k=3$$

مثال سوم

شش عدد بین ۱۷ و ۴۵ طوری قرار دهید که تشکیل یک دنباله ی حسابی دهند.
حل.

$$17, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, 45$$

$$a_1 = 17 \quad a_8 = 45 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_8 - a_1}{8 - 1} = \frac{45 - 17}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45$$

۴- تمرین. در یک دنباله ی حسابی صعودی، $a_1 + a_4 + a_7 = 24$ و $a_1 a_4 a_7 = 440$. دنباله را مشخص کنید.

۵- تمرین. تعداد اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۵ را به دست آورید.

۶- تمرین. اگر زاویه های یک پنج ضلعی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، تشکیل دنباله ی حسابی می دهند. زاویه ها را مشخص کنید.

۷- تمرین. محیط یک مثلث قائم الزاویه برابر ۶۰ است. اگر ضلع های مثلث را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، تشکیل دنباله ی حسابی می دهند. ضلع ها را مشخص کنید.

۳. دنباله ی هندسی

۱- آشنایی با دنباله ی هندسی

۱, ۴, ۱۶, ۶۴, ۲۵۶, ۱۰۲۴, ۴۰۹۶, ۱۶۳۸۴, ...

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{1} = 4 \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{4} = 4 \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{16384}{4096} = 4 \quad \dots$$

$q = 4$ = قدر نسبت دنباله ی هندسی

- دنباله ی هندسی، دنباله ای است که خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن مقداری ثابت است. به این مقدار ثابت، قدر نسبت دنباله ی هندسی گفته و با نماد q نمایش داده می شود.

۲- فرمول های دنباله ی هندسی

- دنباله ی هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید.

$$(۱) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

$$(۲) \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$(۳) \quad \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

- اگر a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند، آن گاه :

$$(۴) \quad b^2 = ac$$

به b واسطه ی هندسی a و c گفته می شود.

۳- چند مثال

مثال اول

در یک دنباله ی هندسی، جمله ی سوم برابر ۱۲ و جمله ی هشتم برابر ۳۸۴ است. دنباله را مشخص کنید.
حل.

$$q^5 = \frac{a_8}{a_3} = \frac{384}{12} = 32 \Rightarrow q = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$a_3 = a_1 q^2 \Rightarrow 12 = 4a_1 \Rightarrow a_1 = 3$$

۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ...

مثال دوم

مقدار k را طوری بیابید که $3k, k+2, k-1$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند.
حل.

$$(k+2)^2 = 3k(k-1) \Rightarrow k^2 + 4 + 4k = 3k^2 - 3k \Rightarrow 2k^2 - 7k - 4 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ k_2 = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} = \frac{7-9}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال سوم

پنج عدد بین ۴ و ۲۹۱۶ طوری قرار دهید که تشکیل یک دنباله ی هندسی دهند.
حل.

$$4, \dots, \dots, \dots, \dots, 2916$$

$$a_1 = 4 \quad a_5 = 2916 \Rightarrow q = \frac{a_5}{a_1} = \frac{2916}{4} = 729 \Rightarrow q = \pm \sqrt[5]{729} = \pm 3$$

$$4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916$$

$$4, -12, 36, -108, 324, -972, 2916$$

۴- تمرین. در یک دنباله ی هندسی نزولی، $a_1 + a_2 + a_3 = 21$ و $a_1 a_2 a_3 = 216$. دنباله را مشخص کنید.

۵- تمرین. در یک دنباله ی هندسی غیر صعودی، $a_1 + a_2 = 12$ و $a_1 + a_4 = 252$. دنباله را مشخص کنید.

۶- تمرین. $3^a, 9\sqrt[5]{27}, 3^b$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. واسطه ی حسابی a و b را به دست آورید.

۷- تمرین. جمله های پنجم، هشتم و چهاردهم یک دنباله ی حسابی، سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. قدر نسبت دنباله ی هندسی را به دست آورید.

۴. مجموع جمله های دنباله ی حسابی

۱- آشنایی با مجموع جمله های دنباله ی حسابی

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 4 = 5$$

$$S_3 = 1 + 4 + 7 = 12 \quad \dots$$

$$S_{334} = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 1000 = 157157$$

• مجموع n جمله ی اول دنباله ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots$ با نماد S_n نمایش داده می شود.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

۲- فرمول های مجموع جمله های دنباله ی حسابی

• دنباله ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید.

$$(1) \quad S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$(2) \quad S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$(3) \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

۳- چند مثال
مثال اول

۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 + 57) = 10 \times 61 = 610$$

مثال دوم

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n(n+1)$$

مثال سوم

مجموع چند جمله ی اول دنباله ی حسابی ۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ... برابر ۷۸۰ است؟
حل.

$$S_n = 780 \Rightarrow \frac{n}{2}(2 + 4n - 4) = 780 \Rightarrow 4n^2 - 2n - 1560 = 0 \Rightarrow (2n)^2 - (2n) - 1560 = 0$$

$$\Rightarrow (2n - 40)(2n + 39) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n - 40 = 0 \Rightarrow 2n = 40 \Rightarrow n = 20 \text{ ق ق} \\ 2n + 39 = 0 \Rightarrow 2n = -39 \Rightarrow n = -\frac{39}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۴- تمرین. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۵ را به دست آورید.

۵- تمرین. حداقل چند جمله ی اول دنباله ی ... -۱۶, -۱۹, -۲۲ را با هم جمع کنیم که حاصل آن مثبت شود؟

۶- تمرین. مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی برابر $S_n = 23n - 2n^2$ است.

(آ) جمله ی هفتم آن چقدر است؟

(ب) مجموع سه جمله ی هفتم، هشتم و نهم آن چقدر است؟

(پ) این دنباله را مشخص کنید.

۷- تمرین. نشان دهید :

$$(آ) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1) \quad (ب) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۵. مجموع جمله‌های دنباله ی هندسی

۱- آشنایی با مجموع جمله‌های دنباله ی هندسی

$$1, 4, 16, 64, \dots$$

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 + 4 = 5 \quad S_3 = 1 + 4 + 16 = 21 \quad \dots$$

$$S_{20} = 1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^{19} = 366503875925$$

• مجموع n جمله ی اول دنباله ی هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ با نماد S_n نمایش داده می شود.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

۲- فرمول های مجموع جمله‌های دنباله ی هندسی

• دنباله ی هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید.

$$(1) \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$(2) \quad S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$(3) \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

۳- چند مثال

مثال اول

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$S_{20} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1 = 1048576 - 1 = 1048575$$

مثال دوم

$$1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$$

$$S_{20} = \frac{1(-2)^{20} - 1}{-2 - 1} = \frac{2^{20} - 1}{-3} = -\frac{1048575}{3} = -349525$$

مثال سوم

مجموع چند جمله ی اول دنباله ی هندسی $4, 12, 36, 108, 324, \dots$ برابر 13120 است؟ حل.

$$S_n = 13120 \Rightarrow \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} = 13120 \Rightarrow 3^n - 1 = 6560 \Rightarrow 3^n = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 8$$

۴- تمرین. مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, 12\sqrt{2}, \dots$ را به دست آورید.

۵- تمرین. مجموع هفت جمله ی اول دنباله ی $a_n = 3 \times 2^{1-2n}$ را به دست آورید.

۶- تمرین. در دنباله ی هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ، مجموع ده جمله ی اول چند برابر مجموع ده جمله ی دوم است؟

۷- تمرین. جمله ی ششم یک دنباله ی هندسی برابر ۲ است. حاصل ضرب یازده جمله ی اول آن چقدر است؟

۶. مجموع همه ی جمله های دنباله ی هندسی نامتناهی

۱- آشنایی با مجموع همه ی جمله های دنباله ی هندسی نامتناهی

$$1, 0/5, 0/25, 0/125, 0/0625, \dots$$

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{\infty} = \frac{1(1-(0/5)^{\infty})}{1-0/5} \approx 1/9999980926$$

$$S_{\infty} = \frac{1(2^{\infty}-1)}{2-1} = 1048575$$

$$S_{\infty} = 1 + 0/5 + 0/25 + 0/125 + 0/0625 + \dots$$

$$S_{\infty} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$S_{\infty} = ?$$

$$S_{\infty} = ?$$

• مجموع همه ی جمله های دنباله ی هندسی نامتناهی $a_1, a_2, a_3, \dots$ با نماد S_{∞} نمایش داده می شود.

$$S_{\infty} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

• به S_{∞} ، معمولاً حد مجموع گفته می شود.

۲- فرمول حد مجموع

• حد مجموع دنباله ی هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ که $|q| < 1$ ، برابر است با :

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

۳- چند مثال

مثال اول

$$6, 3, 1/5, 0/75, 0/375, \dots$$

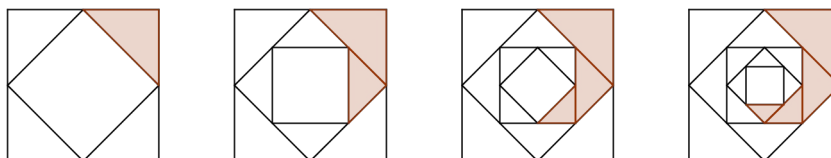
$$S_{\infty} = \frac{6}{1-0/5} = \frac{6}{0/5} = 12$$

مثال دوم

$$1/234 = 1/23434 \dots = 1/2 + 0/034 + 0/00034 + \dots = 1/2 + \frac{0/034}{1-0/01} = 1/2 + \frac{34}{990} = \frac{611}{495}$$

مثال سوم

در مربعی به طول ضلع واحد، وسط اضلاع آن را به هم وصل و بخشی از آن را مطابق شکل زیر رنگ آمیزی می کنیم. اگر این روند را برای رنگ کردن سطح آن ادامه دهیم، در نهایت چه سطحی از مربع رنگ می شود؟



حل.

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

۴- تمرین. حد مجموع دنباله ی هندسی نامتناهی $a_n = 0.75 \times 0.5^{n-2}$ را به دست آورید.

۵- تمرین. در یک دنباله ی هندسی نامتناهی، جمله ی دوم برابر ۳ و حد مجموع برابر ۱۲ است. دنباله را مشخص کنید.

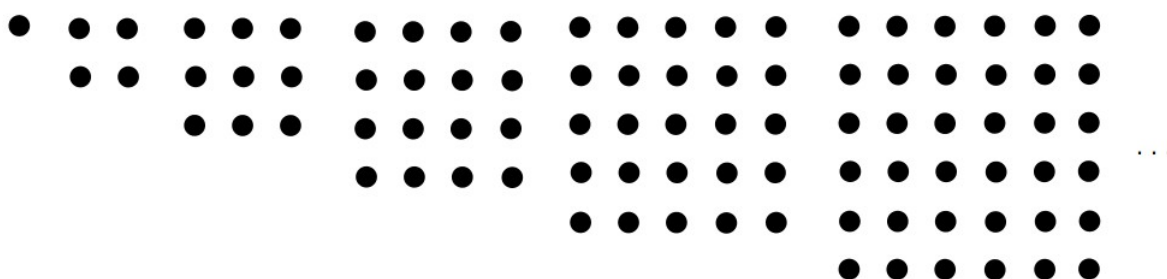
۶- تمرین. یک توپ والیبال را از ارتفاع ۴۰ متری رها می کنیم. اگر پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه ی سه چهارم ارتفاع قبلی بالا بیاید، تا هنگام توقف چه مسافتی را طی می کند؟

۷- تمرین. نشان دهید :

$$(آ) \quad 3/0\bar{2} = \frac{136}{45} \quad (ب) \quad 3/0\bar{2} = \frac{299}{99}$$

۷. دنباله ی مربعی

۱- آشنایی با دنباله ی مربعی



$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

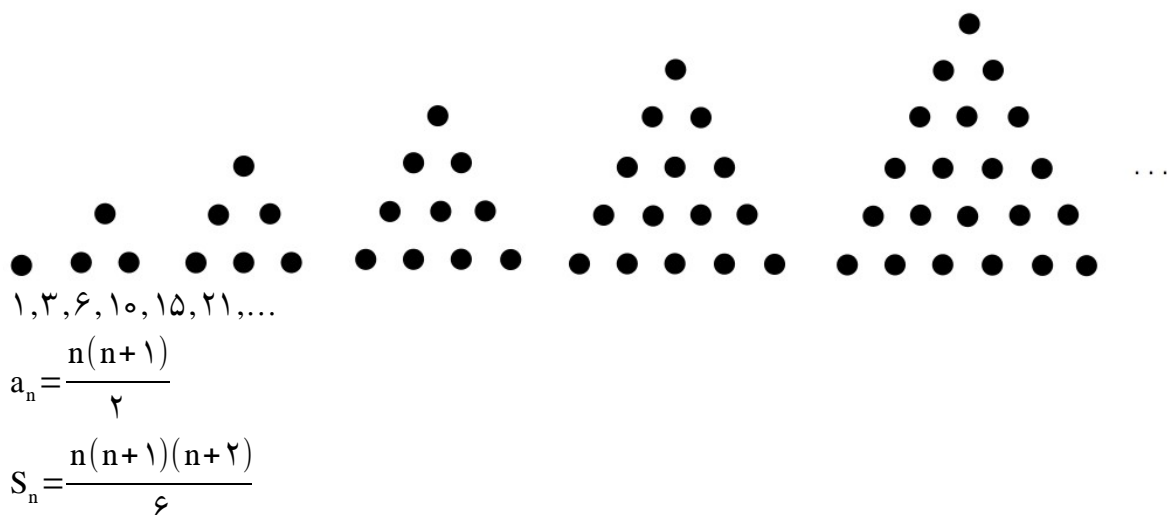
$$a_n = n^2$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۲- تمرین. مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی مربعی را به دست آورید.

۸. دنباله ی مثلثی

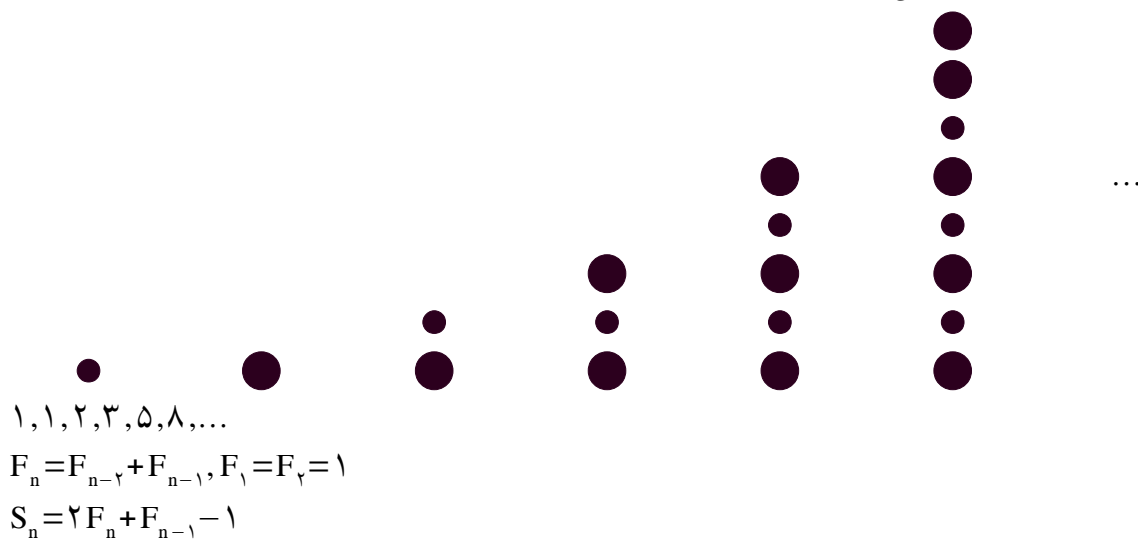
۱- آشنایی با دنباله ی مثلثی



۲- تمرین. مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی مثلثی را به دست آورید.

۹. دنباله ی فیبوناتچی

۱- آشنایی با دنباله ی فیبوناتچی



۲- تمرین. مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی فیبوناتچی را به دست آورید.

۱۰. نسبت طلایی

۱- آشنایی با نسبت طلایی

- پاره خط دلخواه AB و نقطه ی M روی آن را به گونه ای در نظر بگیرید که نسبت طول تمام پاره خط به طول قسمت بلندتر برابر با نسبت طول قسمت بلندتر به طول قسمت کوتاهتر باشد.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- به φ نسبت طلایی یا عدد فی گفته می شود.

$$\varphi \approx 1/6180339887$$

۲- رابطه ی بین نسبت طلایی و دنباله ی فیبوناتچی

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1/5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1/6666666667$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1/6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1/625$$

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1/6153846154$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1/619047619$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1/6176470588$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1/6181818182$$

$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1/6179775281$$

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} = 1/6180555556$$

- با افزایش n ، نسبت هر دو جمله ی متوالی دنباله ی فیبوناتچی یعنی $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ به نسبت طلایی نزدیک و نزدیکتر می شود.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

-۳

۸ لگاریتم

۱. آشنایی با لگاریتم

۱- برای آشنایی با لگاریتم به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5 \quad 3^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad 4^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

$$\log_{100} 1000000 = 3 \quad \log_{10} 0.0000000001 = -11 \quad \log_7 4294967296 = 32$$

- دو عدد حقیقی مثبت x و a که $a \neq 1$ را در نظر بگیرید. لگاریتم x در مبنای a که با نماد $\log_a x$ نمایش داده می‌شود، برابر است با :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

- توجه

(۱) مبنای لگاریتم نمی‌تواند منفی، صفر و یک باشد.

(۲) اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند.

۲- تمرین. به کمک تعریف لگاریتم، نشان دهید :

$$(أ) \log_{\sqrt{3}} 27 = 2 \quad (ب) \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$$

$$(پ) \log_{100} 0.001 = -1/5 \quad (ت) \log_{\sqrt{49}} 343 = \frac{9}{2}$$

۲. فرمول‌های لگاریتم

$$(۱) \log_a 1 = 0$$

$$(۲) \log_a a = 1$$

$$(۳) \log_a x y = \log_a x + \log_a y$$

$$(۴) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(۵) \log_a x^m = m \log_a x$$

$$(۶) \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$(۷) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$(۸) \quad a^{\log_a b} = b$$

$$(۹) \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} \quad (\text{فرمول تغییر مبنا})$$

$$(۱۰) \quad \log_a x \times \log_c a = \log_c x$$

$$(۱۱) \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$(۱۲) \quad \log_a x < \log_a y \Rightarrow \begin{cases} x < y & ; a > 1 \\ x > y & ; 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$(۱۳) \quad \log_a x < y \Rightarrow \begin{cases} x < a^y & ; a > 1 \\ x > a^y & ; 0 < a < 1 \end{cases}$$

• لگاریتم اعشاری. به لگاریتم در مبنای ۱۰، لگاریتم اعشاری گفته می‌شود. مبنای ۱۰ معمولاً نوشته نمی‌شود.

$$(۱۴) \quad \log_{10} x = \log x$$

• لگاریتم طبیعی. به لگاریتم در مبنای e، لگاریتم طبیعی گفته می‌شود.

$$(۱۵) \quad \log_e x = \ln x$$

• عدد e به افتخار ریاضیدان سوئیس لئونارد اویلر، عدد اویلر نامیده می‌شود. گاهی نیز به افتخار جان نپر از آن به اسم ثابت نپر نیز یاد می‌شود، با این حال نماد e به افتخار اویلر (Leonhard Euler) انتخاب شده است. عدد e یک عدد گنگ می‌باشد و تقریباً برابر است با :

$$e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵$$

$$(۱۶) \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0/۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹ \ln x$$

$$(۱۷) \quad \ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx ۲/۳۰۲۵۸۵۰۹۳ \log x$$

$$(۱۸) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

۳. روش‌های محاسبه ی لگاریتم

۱- برای آشنایی با روش‌های محاسبه ی لگاریتم، به مثال‌های زیر و روش حل آنها توجه کنید.
مثال اول

$$\log_8 ۳۲ = \log_{۲^3} ۲^5 = \frac{5}{3} \log_2 ۲ = \frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{3}$$

مثال دوم

$$\log_{\sqrt[3]{2}} 2\sqrt[3]{9} = \log_{\sqrt[3]{2}} 3^{\frac{11}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{3}{5}} \log_r 3 = \frac{22}{15} \times 1 = \frac{22}{15}$$

مثال سوم

$$\log_8 12 + \log_8 6 - \log_8 9 = \log_8 \frac{12 \times 6}{9} = \log_8 8 = 1$$

مثال چهارم

$$27^{\log_3 2} + 5^{\log_5 12} = 2^{\log_3 27} + 12 = 2^3 + 12 = 8 + 12 = 20$$

مثال پنجم

$$\frac{\log_8 8 \times \log_3 6}{\log_9 4} = \frac{\log_3 8}{\log_9 4} = \frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_2 8 = 3$$

۲- تمرین. اگر $\log 2 = 0.3010$ و $\log 3 = 0.4771$ ، لگاریتم های زیر را حساب کنید.

- (آ) $\log 72$ (ب) $\log 45$
 (پ) $\log 0.024$ (ت) $\log \sqrt{135}$

۳- تمرین. اگر $\log_6 2 = a$ و $\log_6 5 = b$ ، لگاریتم های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

- (آ) $\log_6 20$ (ب) $\log_6 45$
 (پ) $\log_{12} 6$ (ت) $\log_{300} 500$

۴- تمرین. به کمک لگاریتم، نشان دهید عدد 3^{1000} دارای ۴۷۸ رقم است. ($\log 3 = 0.4771$)

۴. معادله ی لگاریتمی

۱- آشنایی با معادله ی لگاریتمی

• برای آشنایی با معادله ی لگاریتمی، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\log_r (13-x) + \log_r (5-x) = 7 \Rightarrow \log_r (13-x)(5-x) = 7 \Rightarrow (13-x)(5-x) = 2^7 = 128$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x - 63 = 0 \Rightarrow (x-21)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-21=0 \Rightarrow x=21 \text{ ق ق غ} \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \text{ ق ق ق} \end{cases}$$

۲- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

- (آ) $\log_8 x + \log_{\sqrt{8}} x + \log_{0.2} x = 8$ (ب) $x^{\log_r x} = 9x$
 (پ) $4^{\log x} + x^{\log 2} = 72$ (ت) $\log_r x + \log_x 4 = 3$
 (ث) $2 \log_x 16 + 24 \log_{16} x = 19$ (ج) $\log_x 2 + \log_x (x+2) = 3$

۵. نامعادله ی لگاریتمی

۱- آشنایی با نامعادله ی لگاریتمی

- برای آشنایی با نامعادله ی لگاریتمی، به مثال زیر و روش حل آن توجه کنید.

$$\log_x (x^2 - 2x) < \frac{3}{2} \Rightarrow \log_x x + \log_x (x - 2) < \frac{3}{2} \Rightarrow \log_x (x - 2) < \frac{1}{2} \stackrel{?}{\Rightarrow} x - 2 < x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) < 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4 \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{جواب نامعادله } = (2, 4)$$

۲- تمرین. نامعادله های زیر را حل کنید.

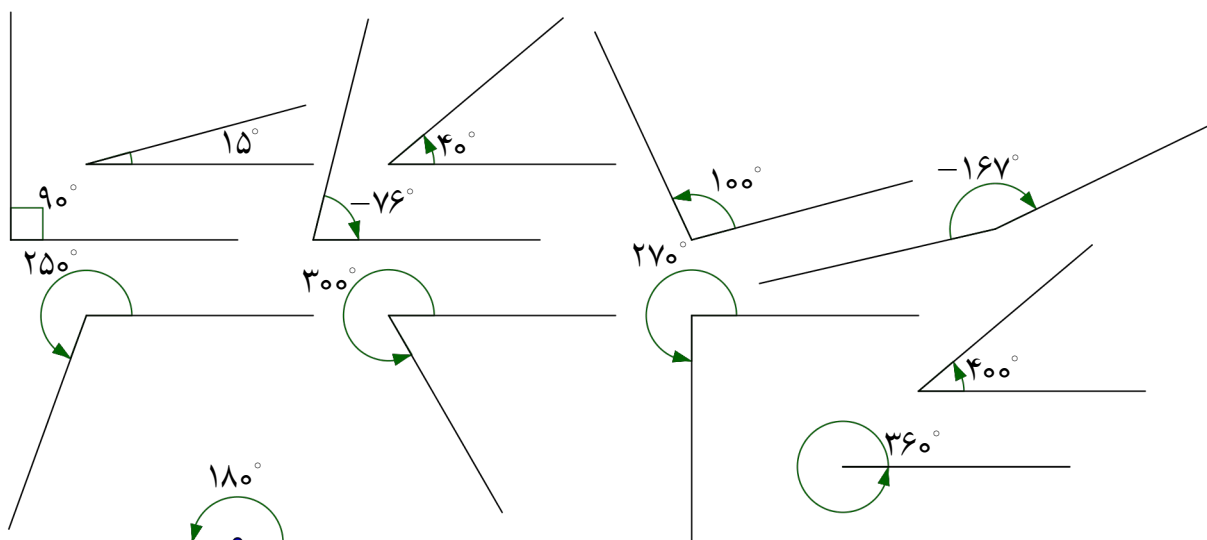
$$(أ) \quad \log_5 (x^2 - x) \leq 1 \qquad (ب) \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + x}{x + 3} \geq -1$$

$$(پ) \quad \log_7 x + \log_x 4 > 3 \qquad (ت) \quad x^{1 + \ln x} < e^2$$

۹ مثلثات

۱. واحدهای زاویه

۱- درجه



• اگر زاویه ی قائمه را به نود قسمت مساوی تقسیم کنیم، به هر یک از آنها زاویه ی یک درجه گفته می شود.

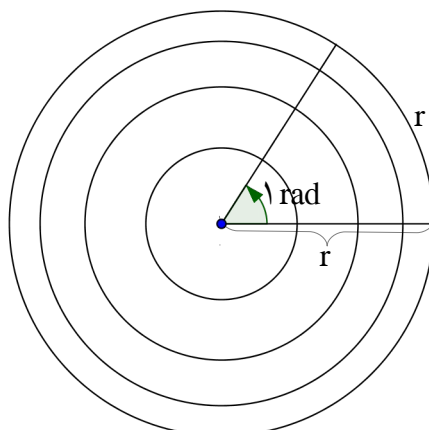
$$90^\circ = \frac{1}{90} \text{ زاویه ی قائمه} \Rightarrow 1^\circ$$

$$180^\circ = \text{زاویه ی نیم صفحه}$$

$$360^\circ = \text{زاویه ی تمام صفحه}$$

• جهت مثبت مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است.

۲- رادیان



• به زاویه ی مرکزی روبرو به کمان به طول شعاع دایره، زاویه ی یک رادیان گفته می شود.

۳- رابطه ی بین درجه و رادیان

زاویه بر حسب رادیان طول کمان

$$\frac{r}{2\pi r} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = 2\pi \Rightarrow 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\begin{array}{cc} \text{زاویه بر حسب رادیان} & \text{زاویه بر حسب درجه} \\ R & D \\ 2\pi & 360 \end{array} \Rightarrow \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{180}{\pi} R \\ R = \frac{D\pi}{180} \end{cases}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57.2957795131^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.0174532925 \text{ rad}$$

۴- توجه

$$\pi \approx 3.1415926536$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

۵- در جدول زیر، اندازه ی چند زاویه بر حسب درجه و رادیان آمده است.

درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۷۰	۳۰۰	۳۳۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

۶- تمرین.

(آ) 255° چند رادیان است؟

(ب) $\frac{7\pi}{15} \text{ rad}$ چند درجه است؟

- ۷- تمرین. در ساعت سه و بیست دقیقه و ده ثانیه، عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار چه زاویه ای بر حسب درجه و رادیان تشکیل می دهند؟

۲. نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

- ۱- مثلث قائم الزاویه ی ABC را در نظر بگیرید. نسبت های مثلثاتی زاویه ی حاده ی $\hat{B}$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$

• نسبت های مثلثاتی سکانت و کسکانت که در دانشگاه کاربرد بیشتری دارند، به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\sec \hat{B} = \frac{1}{\cos \hat{B}} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB}$$

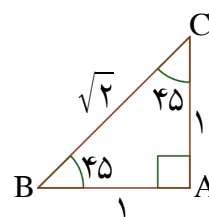
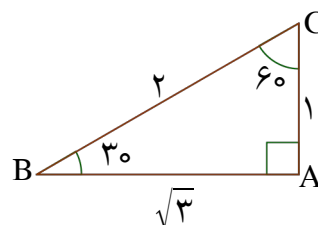
$$\csc \hat{B} = \frac{1}{\sin \hat{B}} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{BC}{AC}$$

- ۲- تمرین. سینوس یکی از زاویه های مثلث قائم الزاویه ای $\frac{12}{13}$ و ضلع مقابل آن زاویه ۲۴ سانتی متر است. محیط و

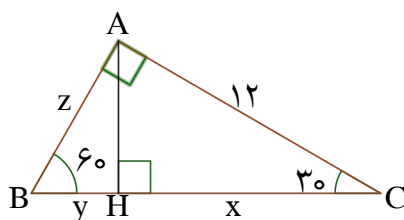
مساحت مثلث را بیابید.

- ۳- نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° ، 45° و 60°

	30°	45°	60°
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
کتانژانت	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



۴- مثال. در شکل زیر، مقادیر x ، y و z را به دست آورید.



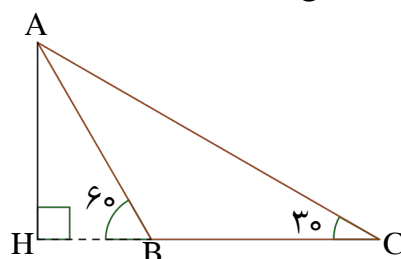
حل.

$$\cos 30^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{y + 6\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}y + 18 = 24 \Rightarrow \sqrt{3}y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

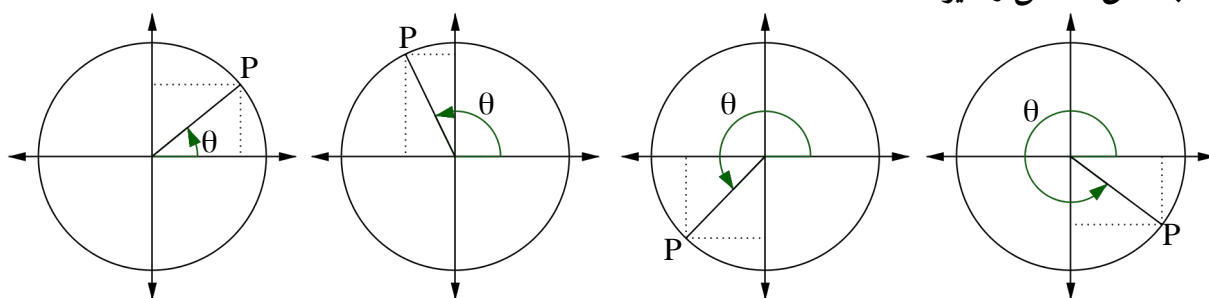
$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{z} \Rightarrow z = \frac{2y}{1} = 4$$

۵- تمرین. در شکل زیر، $BC=12$. اندازه ی ارتفاع AH را به دست آورید.



۳. دایره ی مثلثاتی

۱- نسبت های مثلثاتی و دایره



- نقطه ی $P(x, y)$ را در نظر بگیرید. اگر θ زاویه ای باشد که OP با محور طول ها در جهت مثبت مثلثاتی می سازد، نسبت های مثلثاتی زاویه ی θ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ که}$$

• توجه

$$\sec \theta = \frac{r}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{r}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

۲- تمرین. نقطه ی $P(-۸, -۶)$ را در نظر بگیرید. اگر θ زاویه ای باشد که OP با محور طول ها در جهت مثبت مثلثاتی می سازد، نسبت های مثلثاتی θ را حساب کنید.

۳- شش رابطه ی مهم مثلثاتی

$$(۱) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ۱$$

$$(۲) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(۳) \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$(۴) \quad \tan \theta \times \cot \theta = ۱$$

$$(۵) \quad ۱ + \tan^2 \theta = \frac{۱}{\cos^2 \theta}$$

$$(۶) \quad ۱ + \cot^2 \theta = \frac{۱}{\sin^2 \theta}$$

اثبات.

$$(۱) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = ۱$$

$$(۲) \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$(۳) \quad \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \cot \theta$$

$$(۴) \quad \tan \theta \times \cot \theta = \frac{y}{x} \times \frac{x}{y} = ۱$$

$$(۵) \quad ۱ + \tan^2 \theta = ۱ + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = \frac{۱}{\cos^2 \theta}$$

$$(۶) \quad 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

۴- مثال. درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید.

$$\begin{aligned} (\tilde{ا}) \quad & (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2 & (ب) \quad & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ (پ) \quad & \tan^2 \theta \sin^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta & (ت) \quad & \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

حل.

$$(\tilde{ا}) \quad (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 1 = 2$$

$$(ب) \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (\cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta) \times 1 = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$(پ) \quad \tan^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$(ت) \quad \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

۵- تمرین. درستی رابطه‌ی زیر را نشان دهید.

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 - (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 4 \sin \theta \cos \theta$$

۶- تمرین. درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید.

$$(\tilde{ا}) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (ب) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$(پ) \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta \quad (ت) \quad \cot^2 \theta \cos^2 \theta = \cot^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$(\ث) \quad \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (ج) \quad (1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

۷- تمرین. اگر $\tan \theta = 5$ ، مقدار $\frac{2 \sin \theta + 3 \cos \theta}{3 \cos \theta - 2 \sin \theta}$ را به دست آورید.

۸- تمرین. اگر $\frac{3 \sin \theta - 4 \cos \theta}{5 \cos \theta + 2 \sin \theta} = \frac{2}{9}$ ، مقدار $\cot \theta$ را به دست آورید.

۹- تمرین. اگر $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\sin \theta \cos \theta$ را به دست آورید.

۱۰- تمرین. اگر $\sin \theta \cos \theta = \frac{7}{15}$ ، مقدار $\sin \theta - \cos \theta$ را به دست آورید.

- $$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

- $$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r} = \frac{1}{r} = x$$

- $$\tan \theta = \overline{AK}$$

- $$\cot \theta = \overline{BL}$$

۱۲- نتایج حاصل از دایره ی مثلثاتی

(۱) با توجه به دایره ی مثلثاتی،

$$-1 \leq \sin \theta, \cos \theta \leq 1$$

$$\tan \theta, \cot \theta \in \mathbb{R}$$

(۲) در جدول زیر، نسبت های مثلثاتی چند زاویه ی خاص آمده است.

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
سینوس	۰	۱	۰	-۱	۰
کسینوس	۱	۰	-۱	۰	۱
تانژانت	۰	∞	۰	∞	۰
کتانژانت	∞	۰	∞	۰	∞

(۳) در جدول زیر، علامت نسبت های مثلثاتی در ناحیه های مختلف آمده است.

	ناحیه ی اول	ناحیه ی دوم	ناحیه ی سوم	ناحیه ی چهارم
سینوس	+	+	-	-
کسینوس	+	-	-	+
تانژانت	+	-	+	-
کتانژانت	+	-	+	-

(۴) در جدول زیر، جهت تغییرات نسبت های مثلثاتی در ناحیه های مختلف آمده است.

	ناحیه ی اول	ناحیه ی دوم	ناحیه ی سوم	ناحیه ی چهارم
سینوس				
کسینوس				
تانژانت				
کتانژانت				

۱۳- تمرین. اگر $\cos \theta = \frac{15}{17}$ و θ یک زاویه ی حاده باشد، سایر نسبت های مثلثاتی θ را به دست آورید.

۱۴- تمرین. اگر $\tan \theta = -\frac{12}{5}$ و θ یک زاویه ی منفرجه باشد، سایر نسبت های مثلثاتی θ را به دست آورید.

۱۵- تمرین. مقادیر m را طوری بیابید که $\sin \theta = \frac{2m-1}{m+1}$ و $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5\pi}{6}$.

۴. تعیین نسبت‌های مثلثاتی تمام زاویه ها

۱- در جدول زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه های $-\theta$ ، $\pi - \theta$ ، $\frac{\pi}{2} + \theta$ و ... بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی θ آمده است.

	$-\theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\frac{\pi}{2} + \theta$	$\frac{3\pi}{2} - \theta$	$\frac{3\pi}{2} + \theta$
سینوس	$-\sin \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	$\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$
کسینوس	$\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$-\sin \theta$	$\sin \theta$
تانژانت	$-\tan \theta$	$-\tan \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$
کوتانژانت	$-\cot \theta$	$-\cot \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$

۲- نسبت‌های مثلثاتی دارای رفتار تناوبی هستند. در فرمول های زیر، $k \in \mathbb{Z}$.

- (۱) $\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$
- (۲) $\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$
- (۳) $\tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$
- (۴) $\cot(k\pi + \theta) = \cot \theta$

۳- تمرین. مقدار $\frac{\sin \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6}}{\tan \frac{45\pi}{4} - \cot \frac{11\pi}{6}}$ را حساب کنید.

۴- تمرین. مقدار $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ را حساب کنید.

۵. نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

۱- دو زاویه ی α و β را در نظر بگیرید.

- (۱) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- (۲) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- (۳) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- (۴) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- (۵) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
- (۶) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$$(۷) \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$(۸) \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

۲- تمرین. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۱۵° و ۷۵° را به دست آورید.

۳- تمرین. اگر $\cos \alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$ و $\sin \beta = \frac{۷}{۲۵}$ و α زاویه ی حاده و β زاویه ی منفرجه باشد، مقادیر $\sin(\alpha + \beta)$ و $\tan(\alpha - \beta)$ را به دست آورید.

۴- تمرین. اگر $\tan(\alpha + \beta) = \frac{۴}{۵}$ و $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{۵}{۱۲}$ ، مقادیر $\tan^2 \alpha$ و $\cot^2 \beta$ را به دست آورید.

۵- تمرین. درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید.

$$(آ) \quad \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (ب) \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

۶- تمرین. نشان دهید :

$$(آ) \quad \tan ۱۰^\circ + \tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰۰^\circ = \tan ۱۰^\circ \tan ۷۰^\circ \tan ۱۰۰^\circ$$

$$(ب) \quad \cot ۱۰^\circ \cot ۷۰^\circ + \cot ۱۰^\circ \cot ۱۰۰^\circ + \cot ۷۰^\circ \cot ۱۰۰^\circ = ۱$$

۷- نه رابطه ی مهم مثلثاتی

$$(۱) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$(۲) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$(۳) \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$(۴) \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$(۵) \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$(۶) \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$(۷) \quad \cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cot \alpha - 1}{\cot \alpha + 1}$$

$$(۸) \quad \cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1}$$

$$(۹) \quad c - \sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \alpha + b \cos \alpha + c \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}$$

• تمرین. درستی هشت رابطه ی اول را نشان دهید.

• اثبات رابطه ی (۹)

$$\begin{aligned}
 A = a \sin \alpha + b \cos \alpha + c &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) + c \\
 &\stackrel{?}{=} \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) + c = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta) + c \\
 &\stackrel{?}{\Rightarrow} c - \sqrt{a^2 + b^2} \leq A \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

۶. نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه

-۱ زاویه ی α را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 (۲) \quad \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\
 (۳) \quad \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\
 (۴) \quad \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}
 \end{aligned}$$

-۲ تمرین. اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه ی حاده باشد، مقادیر $\sin 2\alpha$ ، $\cos 2\alpha$ و $\tan 2\alpha$ را به دست آورید.-۳ تمرین. مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $\alpha = 7/5^\circ$ به دست آورید.

$$\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

-۴ تمرین. درستی رابطه ی زیر را نشان دهید.

$$\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

-۵ دوازده رابطه ی مهم مثلثاتی

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad \tan \alpha + \cot \alpha &= \frac{2}{\sin 2\alpha} \\
 (۲) \quad \cot \alpha - \tan \alpha &= 2 \cot 2\alpha \\
 (۳) \quad \sqrt{1 + \sin 2\alpha} &= |\sin \alpha + \cos \alpha| \\
 (۴) \quad \sqrt{1 - \sin 2\alpha} &= |\sin \alpha - \cos \alpha| \\
 (۵) \quad \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\
 (۶) \quad \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

$$(۷) \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$(۸) \quad \cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

$$(۹) \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$(۱۰) \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$(۱۱) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$(۱۲) \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

• تمرین. درستی این دوازده رابطه را نشان دهید.

۶- تمرین. نشان دهید:

$$(آ) \quad \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = 4 \quad (ب) \quad \cot 15^\circ - \tan 15^\circ = 2\sqrt{3}$$

۷- تمرین. نسبت‌های مثلثاتی زاویه $22/5^\circ$ را به دست آورید.

۸- تمرین. اگر $\tan \alpha = 5$ ، مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

۷. نسبت‌های مثلثاتی سه برابر زاویه

۱- زاویه α را در نظر بگیرید.

$$(۱) \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$(۲) \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$(۳) \quad \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$(۴) \quad \cot 3\alpha = \frac{3 \cot \alpha - \cot^3 \alpha}{1 - 3 \cot^2 \alpha}$$

۲- تمرین. مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $\alpha = 7/5^\circ$ به دست آورید.

$$(\epsilon \sin \alpha - \lambda \sin^3 \alpha)(\lambda \cos^3 \alpha - \epsilon \cos \alpha)$$

۸. فرمول های تبدیل جمع به ضرب مثلثاتی۱- دو زاویه ی α و β را در نظر بگیرید.

$$(۱) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(۲) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(۳) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(۴) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(۵) \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$(۶) \quad \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$(۷) \quad \cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$(۸) \quad \cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$(۹) \quad \tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$(۱۰) \quad \tan \alpha - \cot \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

۲- تمرین. نشان دهید :

$$(\tilde{۱}) \quad \sin ۵^\circ + \sin ۵۵^\circ - \sin ۶۵^\circ = ۰$$

$$(ب) \quad \frac{۱}{\sin ۷۰^\circ} + ۲ = ۴ \sin ۵^\circ$$

۳- تمرین. درستی رابطه های زیر را نشان دهید.

$$(\tilde{۱}) \quad \frac{\sin ۷\alpha - \sin ۱۳\alpha}{\cos ۷\alpha + \cos ۱۳\alpha} = -\tan ۳\alpha$$

$$(ب) \quad \frac{\sin ۷\alpha + \sin ۱۰\alpha + \sin ۱۳\alpha}{\cos ۷\alpha + \cos ۱۰\alpha + \cos ۱۳\alpha} = \tan ۱۰\alpha$$

۴- تمرین. نشان دهید :

$$(\tilde{۱}) \quad \frac{\sin ۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ + \cos ۷۰^\circ} = \cot ۵^\circ$$

$$(ب) \quad \tan ۱۰^\circ + \tan ۷۰^\circ = \frac{۱}{\sin ۲۰^\circ}$$

۹. فرمول های تبدیل ضرب به جمع مثلثاتی

۱- دو زاویه α و β را در نظر بگیرید.

$$(۱) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$(۲) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$(۳) \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)]$$

$$(۴) \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$(۵) \quad \cot \alpha \cot \beta = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$(۶) \quad \tan \alpha \cot \beta = \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$$

۲- تمرین. نشان دهید :

$$(ا) \quad \sin ۱۰۵^\circ \cos ۷۵^\circ = \frac{1}{4}$$

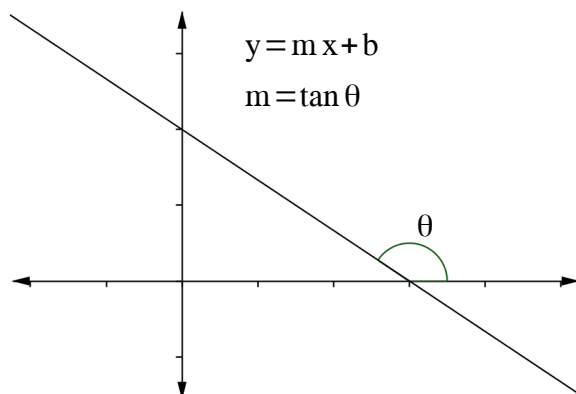
$$(ب) \quad \sin ۷۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۸۰^\circ = \frac{1}{8}$$

$$(پ) \quad \tan ۲۰^\circ \tan ۴۰^\circ \tan ۸۰^\circ = \sqrt{3}$$

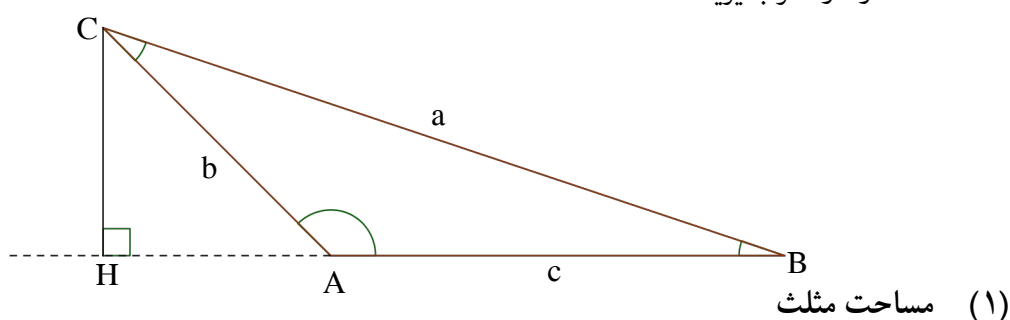
$$(ت) \quad \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

۱۰. کاربردهای مثلثات

۱- شیب خط



- شیب خط برابر است با تانژانت زاویه ای که با محور طول ها در جهت مثبت مثلثاتی می سازد.
- ۲ تمرین. معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(1, \sqrt{3})$ گذشته و با محور طول ها در جهت مثبت مثلثاتی زاویه ی 30° درجه می سازد.
- ۳ مثلث ABC را در نظر بگیرید.



$$S = \frac{1}{2} a b \sin \hat{C} = \frac{1}{2} a c \sin \hat{B} = \frac{1}{2} b c \sin \hat{A}$$

برهان.

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} a c \sin \hat{B}$$

به طور مشابه ثابت می شود :

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \hat{C}$$

$$S = \frac{1}{2} b c \sin \hat{A}$$

(۲) قضیه ی سینوس ها

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

برهان.

$$\frac{1}{2} a b \sin \hat{C} = \frac{1}{2} a c \sin \hat{B} \Rightarrow b \sin \hat{C} = c \sin \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

به طور مشابه ثابت می شود :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

(۳) قضیه ی کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

برهان.

$$\begin{aligned} BC^2 &= CH^2 + HB^2 = CH^2 + (HA + AB)^2 = CH^2 + HA^2 + AB^2 + 2HA \times AB \\ &\stackrel{?}{=} AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \cos \hat{A} \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \end{aligned}$$

به طور مشابه ثابت می شود :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

توجه. قضیه ی فیثاغورس، حالت خاصی از قضیه ی کسینوس ها است.

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۴- تمرین. دو ضلع یک مثلث ۲ سانتی متر و ۶ سانتی متر و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع است. محیط آن را بیابید. چند حالت وجود دارد؟ چرا؟

۵- تمرین. قطرهای یک متوازی الاضلاع ۱۲ سانتی متر و ۲۲ سانتی متر است و با یکدیگر زاویه ی ۶۰ درجه می سازند. محیط و مساحت آن چقدر است؟

۱۱. معادله ی مثلثاتی

۱- آشنایی با معادله ی مثلثاتی

- با توجه به رفتار تناوبی نسبت های مثلثاتی، یک معادله ی مثلثاتی می تواند بی شمار جواب داشته باشد. هنگام حل معادله ی مثلثاتی به یکی از حالت های زیر می رسم:

$$\sin x = \sin \alpha \qquad \cos x = \cos \alpha \qquad \tan x = \tan \alpha \qquad \cot x = \cot \alpha$$

$$(۱) \quad \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$(۲) \quad \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$(۳) \quad \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$(۴) \quad \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

۲- شش حالت خاص

$$(۱) \quad \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(۲) \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$(۳) \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$(۴) \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$(۵) \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$(۶) \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۳- چند مثال

مثال اول

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال دوم

$$2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مثال سوم

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = 1 \\ &\Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

مثال چهارم

$$\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = -1 = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال پنجم

$$\begin{aligned}\tan 2x \tan 3x = 1 &\Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) \\ &\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

۴- تمرین. معادله های زیر را حل کنید.

- | | |
|--|---|
| (آ) $2 \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ | (ب) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ |
| (پ) $2 \sin^2 x - 1 = 0$ | (ت) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ |
| (ث) $\cos x \cos 2x \cos 3x = 0$ | (ج) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$ |
| (چ) $\cos x \cos 3x - \cos 2x \cos 4x = 0$ | (ح) $5 \sin x + 5 \cos x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0$ |
| (خ) $2 \cot x \sin^2 x = 1$ | (د) $\tan x + \cot x + 2 = 0$ |
| (ذ) $3 \tan x - 3 \cot x = 2\sqrt{3}$ | (ر) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$ |

۵- تمرین. معادله ی $\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ چرا؟

۱۲. وارون نسبت های مثلثاتی

۱- آشنایی با وارون نسبت های مثلثاتی

$$\sin^{-1} x = \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = x \quad (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\cos^{-1} x = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = x \quad (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\tan^{-1} x = \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = x \quad (x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\cot^{-1} x = \alpha \Leftrightarrow \cot \alpha = x \quad (x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \pi)$$

۲- چند مثال

$$(ا) \quad \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$(ب) \quad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$(پ) \quad \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$(ت) \quad \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$(ث) \quad \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(ج) \quad \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$(ع) \quad \cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$$

$$(ح) \quad \cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$(خ) \quad \sin^{-1}\left(\sin \frac{7\pi}{6}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$(د) \quad \cos^{-1}\left(\cos \frac{11\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$(ذ) \quad \tan^{-1}\left(\tan \frac{5\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(ر) \quad \cot^{-1}\left(\cot \frac{10\pi}{3}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$۳- \text{تمرین. مقدار } \frac{\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cot^{-1}\left(\tan \frac{7\pi}{6}\right)} \text{ را حساب کنید.}$$

۴- فرمول های وارون نسبت های مثلثاتی

$$(۱) \quad \sin(\sin^{-1} x) = x$$

$$(۲) \quad \cos(\cos^{-1} x) = x$$

$$(۳) \quad \tan(\tan^{-1} x) = x$$

$$(۴) \quad \cot(\cot^{-1} x) = x$$

$$(۵) \quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(۶) \quad \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(۷) \quad \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

$$(۸) \quad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

$$(۹) \quad \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

$$(۱۰) \quad \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$$

$$(۱۱) \quad \sin^{-1} x = \begin{cases} \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -\cos^{-1} \sqrt{1-x^2} & ; -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$(۱۲) \quad \cos^{-1} x = \begin{cases} \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} & ; -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$(۱۳) \quad \sin^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(۱۴) \quad \cos^{-1} x = \cot^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(۱۵) \quad \sin^{-1} x = \begin{cases} \cot^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & ; 0 < x \leq 1 \\ -\pi + \cot^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & ; -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$(۱۶) \quad \cos^{-1} x = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & ; 0 < x \leq 1 \\ \pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & ; -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$(۱۷) \quad \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(۱۸) \quad \cot^{-1} x = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(۱۹) \quad \tan^{-1} x = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ; x \geq 0 \\ -\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$(۲۰) \quad \cot^{-1} x = \begin{cases} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ; x \geq 0 \\ \pi - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$(۲۱) \quad \tan^{-1} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(۲۲) \quad \cot^{-1} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \cot^{-1} \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(۲۳) \quad \tan^{-1} x = \begin{cases} \cot^{-1} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(۲۴) \quad \cot^{-1} x = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \pi + \tan^{-1} \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

۵- چند مثال
مثال اول

$$\sin(\cos^{-1}(\frac{12}{13})) \stackrel{?}{=} \sin(\sin^{-1}\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}) = \sin(\sin^{-1}\frac{5}{13}) \stackrel{?}{=} \frac{5}{13}$$

مثال دوم

$$\cos^{-1}(\sin\frac{\pi}{12}) \stackrel{?}{=} \cos^{-1}(\cos\frac{5\pi}{12}) \stackrel{?}{=} \frac{5\pi}{12}$$

مثال سوم

$$\cos(\tan^{-1}(-2)) \stackrel{?}{=} \cos(-\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}) \stackrel{?}{=} \cos(\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5}) \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{5}}{5}$$

مثال چهارم

$$\cos(2\sin^{-1}\frac{1}{3}) \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin^2(\sin^{-1}\frac{1}{3}) \stackrel{?}{=} 1 - 2(\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

مثال پنجم

$$\sin(2\tan^{-1}\frac{1}{3}) \stackrel{?}{=} \frac{2\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3})}{1+\tan^2(\tan^{-1}\frac{1}{3})} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1+(\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

۶- تمرین. مقادیر زیر را حساب کنید.

(ا) $\sin^{-1}(\frac{3}{5}) + \sin^{-1}(\frac{4}{5})$

(ب) $\tan^{-1}(\tan 10)$

(پ) $\cos(\cot^{-1}2)$

(ت) $\tan^{-1}(\sqrt{5}-2) + \tan^{-1}(\sqrt{5}+2)$

(ث) $\tan(2\sin^{-1}\frac{1}{3})$

(ج) $\tan(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3})$