

کتاب کار و آموزش

هندسه دهم

پایه دهم ریاضی و فیزیک



تدوین و گردآوری: روح الله ولی زاده

سال تحصیلی ۹۶-۹۷

فصل ۱: ترسیم های هندسی و استدلال	
درس اول: ترسیم های هندسی	
درس دوم: استدلال	
فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن	
درس اول: نسبت و تناسب در هندسه	
درس دوم: قضیه تالس	
درس سوم: تشابه مثلث ها	
درس چهارم: کاربردهای از قضیه تالس و تشابه مثلث ها	
فصل ۳: چند ضلعی ها	
درس اول: چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها	
درس دوم: مساحت و کاربردهای آن	
فصل ۴: تجسم فضایی	
درس اول: خط، نقطه و صفحه	
درس دوم: تفکر تجسمی	

بارم بندی

نوبت اول	نوبت دوم	نوبت شهریور
----------	----------	-------------

فصل ۱	۹	۳	۳
فصل ۲	۱۱	۴	۵
فصل ۳	-	۷	۷
فصل ۴	-	۶	۵

طرح درس سالانه هندسه (۱)

صفحه: ۱

نام دبیر:

رشته: ریاضی و فیزیک

پایه: دهم

ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
مهر	اول	۱۰	۱۳	ترسیم های هندسی، خواص نیمساز زاویه، خواص عمود منصف پاره خط
	دوم	۱۴	۱۷	رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط، حل تمرین
	سوم	۱۸	۲۱	استدلال، استقرا و استنتاج
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
آبان	اول	۲۲	۲۵	قضیه، عکس قضیه
	دوم	۲۶	۲۸	قضیه های دشرطی، حل تمرین
	سوم	۳۰	۳۳	نسبت و تناسب، معرفی نسبت های مختلف، واسطه ی هندسی
	چهارم	۳۴	۳۷	قضیه ی تالس، عکس قضیه ی تالس، حل تمرین
آذر	اول	-	-	آزمون مستمر
	دوم	۳۸	۴۱	تشابه مثلث ها و قضیه های آن
	سوم	۴۲	۴۴	قضیه ی فیثاغورس، روابط طولی در مثلث قائم الزوايه، حل تمرین
	چهارم	۴۵	۴۸	کاربردهایی از قضیه ی تالس، قضیه ی نیمساز، نسبت اجزای فرعی
دی	اول	۴۹	۵۲	حل تمرین، آزمون مستمر
	دوم	آزمون نوبت اول		
	سوم			
	چهارم	۵۴	۵۷	تعریف چندضلعی، قطر چندضلعی، چندضلعی های محدب و مقعر، چهارضلعی های مهم، متوازی الاضلاع

صفحه: ۲

نام دبیر:

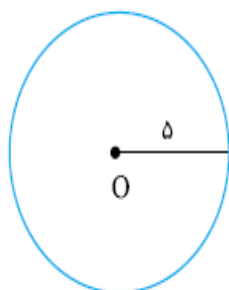
رشته: ریاضی و فیزیک

پایه: دهم

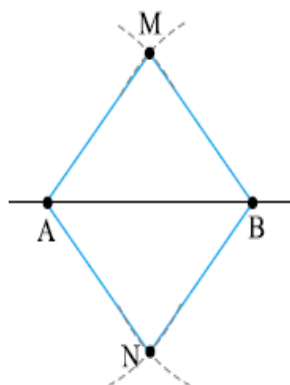
ماه	هفته	صفحات تدریس یا حل تمرین		رئوس مطالب
		از صفحه	تا صفحه	
بهمن	اول	۵۸	۶۱	ادامه ی متوازی الاضلاع ، ویژگی های مهم مثلث قائم الزاویه ، لوزی
	دوم	۶۲	۶۴	ذوزنقه ، حل تمرین
	سوم	۶۵	۶۸	مساحت و کاربردهای آن در حل مسائل
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
اسفند	اول	۶۹	۷۱	نقاط شبکه ای و مساحت
	دوم	۷۲	۷۶	حل تمرین
	سوم	۷۸	۸۱	خط، نقطه و صفحه و حالت های مختلف « دو خط » و « خط و صفحه » در فضا
	چهارم	۸۲	۸۶	حالت های مختلف دو صفحه ، تعامد دو صفحه ، حل تمرین
فروردین	اول	تعطیلات نوروز		
	دوم			
	سوم	۸۷	۹۰	تفکر تجسمی
	چهارم	-	-	آزمون مستمر
اردیبهشت	اول	۹۱	۹۳	حل تمرین ، برش
	دوم	۹۴		حل تمرین ، دوران حول محور
	سوم	آزمون نوبت دوم		
	چهارم			

درس اول: ترسیم‌های هندسی

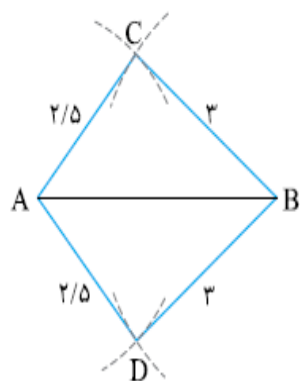
با این‌که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً، هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.



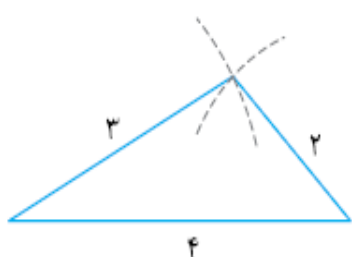
فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع 5 رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با 5 است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با 5 باشد.



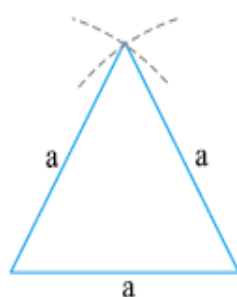
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی 4 سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $2/5$ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی 3 سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با $2/5$ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با $2/5$ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با 3 سانتی‌متر است.



مثال: می‌خواهیم مثلی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع ۲ و از سر دیگر آن کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.



مثال: می‌خواهیم مثلی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳- نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه A باشند.



۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

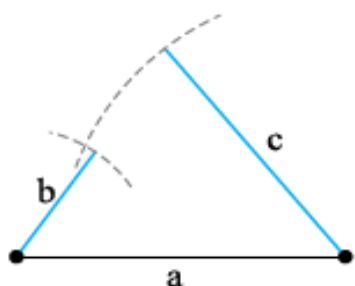
نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.

نتیجه فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این که مثلی به طول ضلع‌های a، b و c وجود داشته باشد، باید

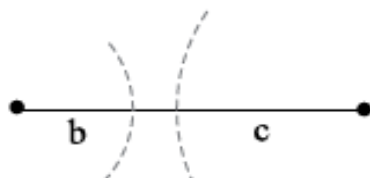
$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

زیرا

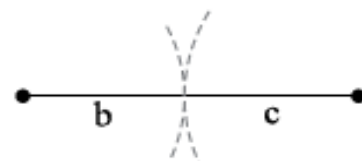
پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمائی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمائی بزنید. در این صورت، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c>a$.



$$b+c>a$$



$$b+c<a$$



$$b+c=a$$

توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c>b$. همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b>c$.

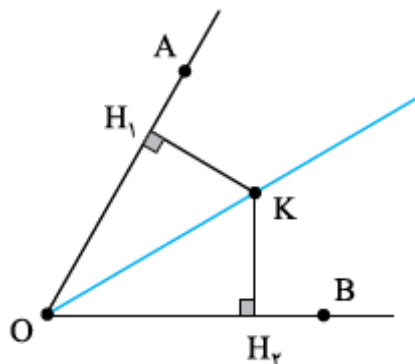
خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

مسئله 1:

نشان دهید هر نقطه‌ای که رو نیمساز یک زاویه باشد فاصله اش از دو سر نیمساز یکسان است و برعکس.

حل:

زاویه AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $\hat{H}_1OK = \hat{H}_2OK$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده‌ی همنهشت‌اند و در نتیجه $KH_1 = KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.



اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1 = KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $\hat{H}_1OK = \hat{H}_2OK$ ، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.
 - طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.
 - طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- اندازه زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

- پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

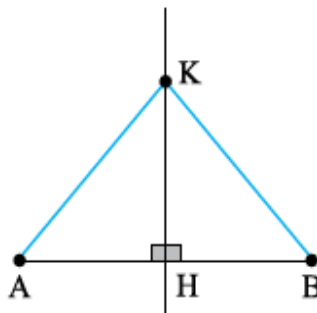
مسئله 2:

نشان دهید اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

حل:

پاره خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث های قائم الزاویه ای AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH) ، یک زاویه ای (قائمه ی) برابر دارند $(\hat{A}HK = \hat{B}HK)$ و دو ضلع برابر نیز دارند $(AH = BH)$.

بنابراین مثلث‌های AHK و BHK هم‌نهشت‌اند (ض‌ض) و در نتیجه $KA=KB$. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.



اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A ، B و H وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK هم‌نهشت‌اند (ض‌ض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $\hat{A}HK = \hat{B}HK = 90^\circ$ ، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه

هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

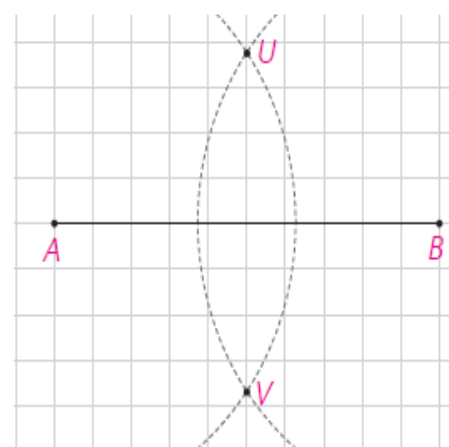
- ۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

- ۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه موردنظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت

پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.



۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

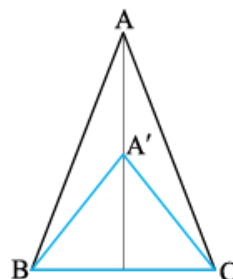
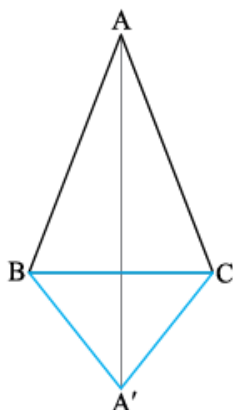
۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

کاردکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

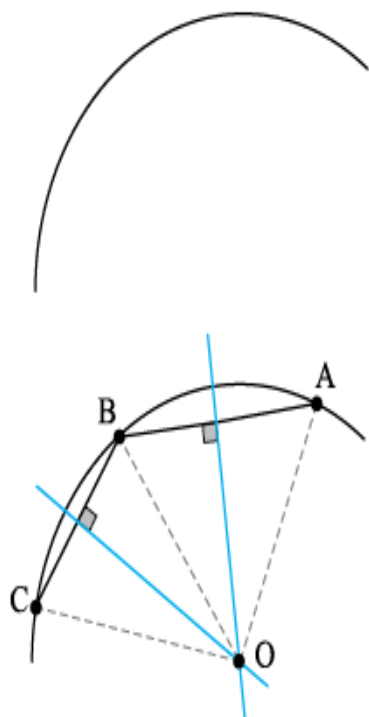
مسئله ۳ دو مثلث متساوی الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.

راه حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'BC$ متساوی الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون $AB=AC$ پس A روی عمود منصف BC قرار دارد و چون $A'B=A'C$ در نتیجه A' روی عمود منصف BC قرار دارد. بنابراین AA' عمود منصف ضلع BC است. پس خط AA' بر BC عمود است.



مسئله ۴

در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟



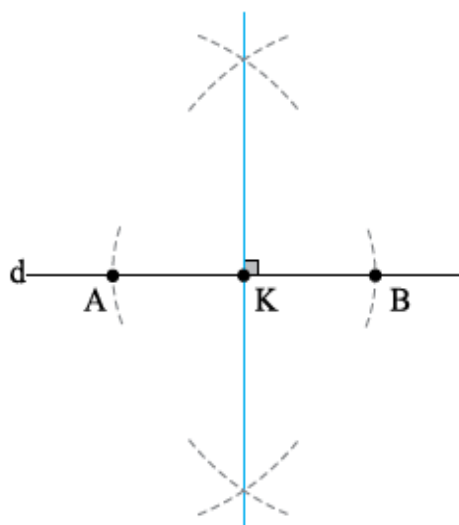
راه حل: سه نقطه‌ی A، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمود منصف پاره‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است. اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.

مسئله 5:

نحوه رسم خط عمود بر یک خط را توضیح دهید.

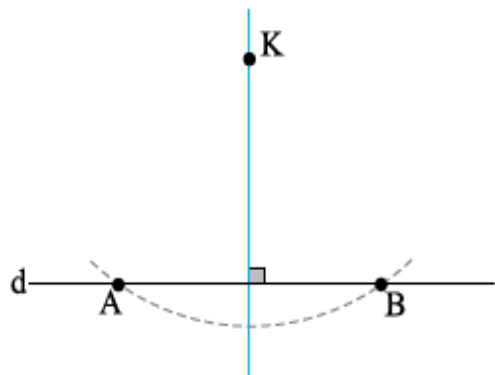
خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه‌ی K روی خط d است



به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌ی AB است. اکنون اگر عمود منصف پاره‌ی AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمود منصف پاره‌ی AB است.

ب) نقطه‌ی K خارج خط d است

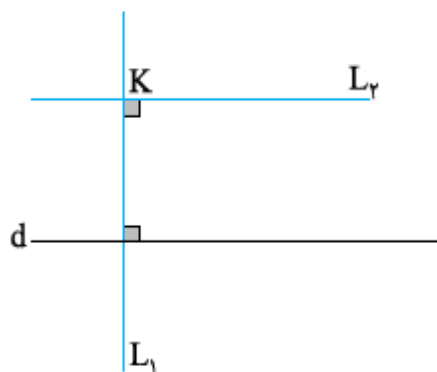


به مرکز نقطه‌ی K کمانی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

مسئله 6:

مراحل رسم خطی موازی با یک از یک نقطه غیر واقع بر آن را توضیح دهید.



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L_1 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر L_1 عمود باشد. در این صورت خط‌های d و L_2 بر خط L_1 عمودند، پس موازی‌اند.

پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد در نظر بگیرید.
 الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این
 عمود منصف با پاره خط AB ، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط
 C و D قطع کند.

پ) چهار ضلعی $ACBD$ چگونه چهار ضلعی ای است؟ چرا؟

کاردکلاس

طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

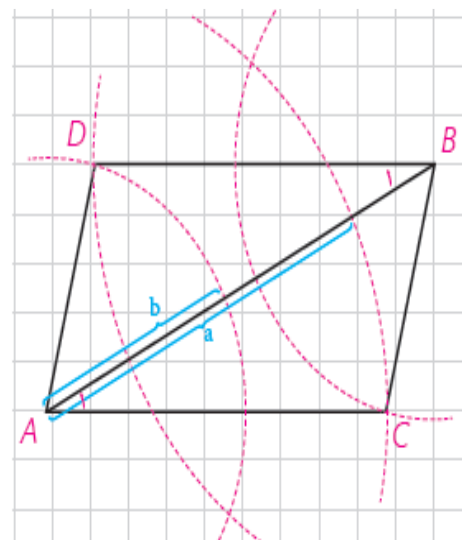


تمرین

۱- می دانیم چندضلعی ای که قطرهاش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است.
متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع
به طول قطرهای ۴ و ۷ می توان رسم کرد؟

۲- می دانیم چندضلعی ای که قطرهاش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است.
مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.

۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b
باز می کنیم و از نقطه A دو کمان می زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ تر
باشد) سپس کمان هایی با همان اندازه ها، این بار از نقطه B می زنیم و مانند شکل، دو نقطه از
نقاط برخورد را C و D می نامیم. چهارضلعی $ACBD$ چه نوع چندضلعی ای است؟ چرا؟
(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت
به هم چگونه اند.)



۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

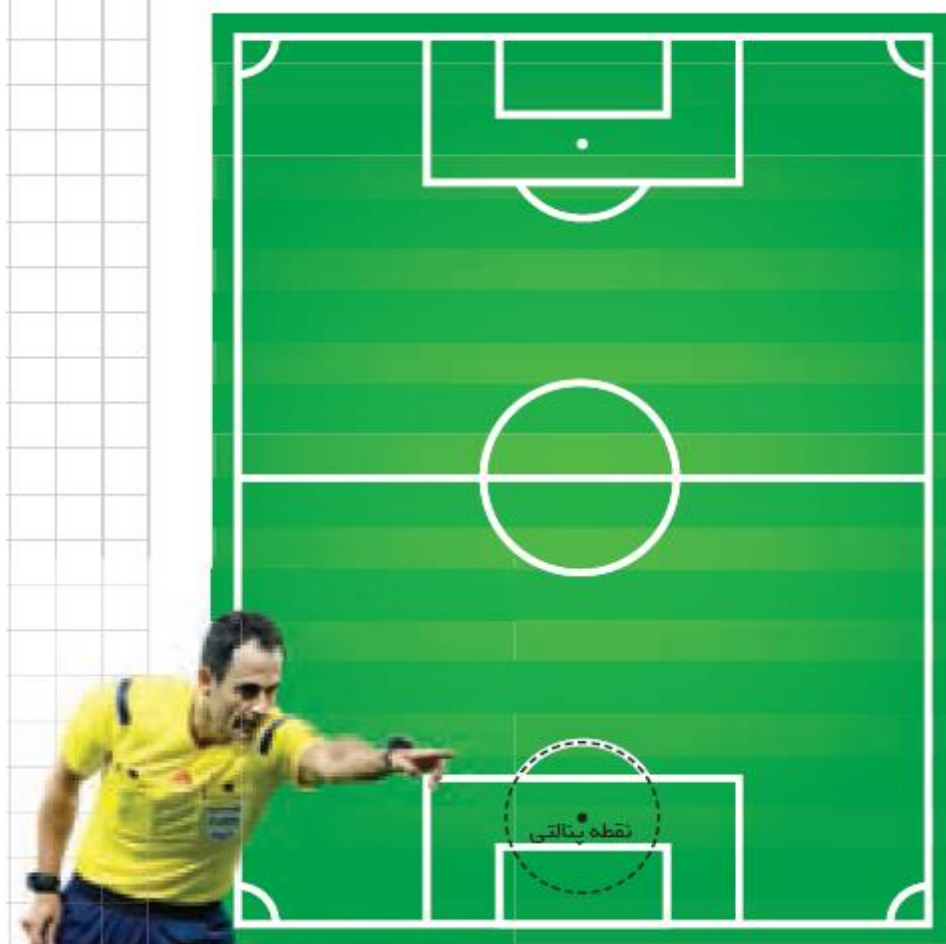
۵- می دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

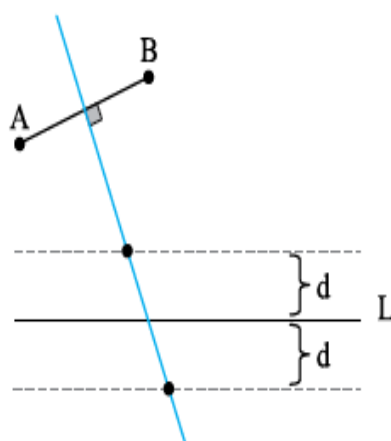
۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.
ب) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.
پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

آیا می دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟
یک داور فوتبال لحظه ای که اعلام پنالتی می کند، متوجه می شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



مسئله ۶ d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.



راه حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.

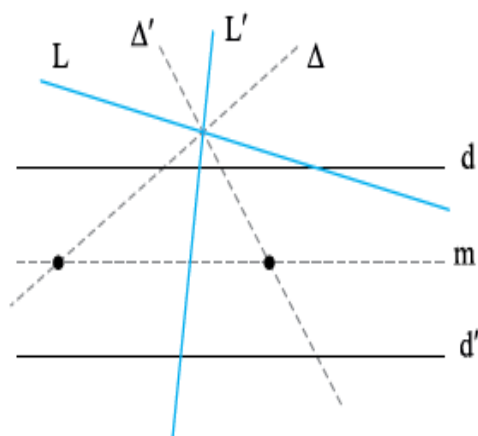
بحث در تعداد جواب:

حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

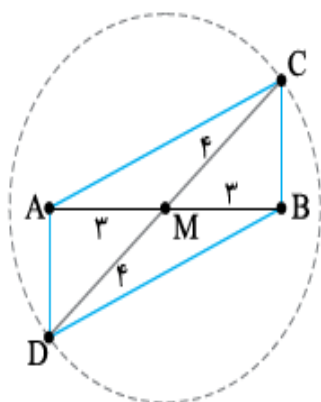
مسئله ۷ همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



راه حل: دو خط موازی را d و d' و دو خط متقاطع را L و L' می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d' به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d' ، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L' برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ' در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ' با خط m هستند.

مسئله ۸

متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جوابها بحث کنید.



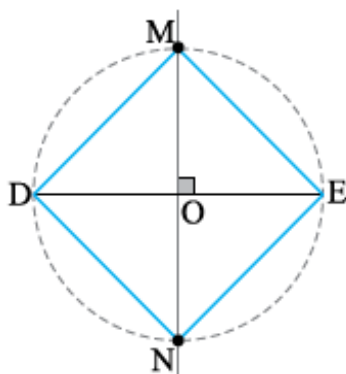
راه حل: می دانیم در متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می کنند. اکنون مطابق شکل پاره خط AB را به طول ۶ رسم می کنیم. وسط پاره خط AB را M می نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{AB}{2} = 3$ دایره ای رسم می کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می کنیم (مانند قطر CD در شکل، فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند). چهارضلعی ACBD متوازی الاضلاع مورد نظر است.

واضح است که نامتناهی متوازی الاضلاع با این ویژگی ها می توان رسم کرد.

مسئله 9:

مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد؟

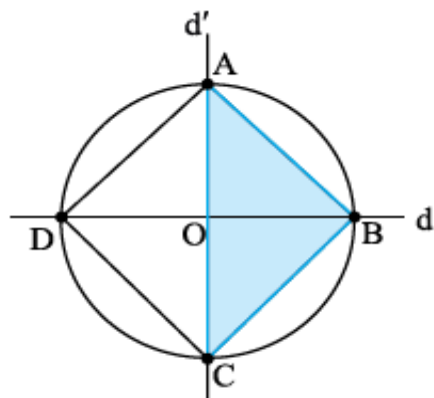
D ————— E



راه حل: می دانیم در مربع قطرهای عمود منصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمود منصف پاره خط معلوم DE را رسم می کنیم. سپس به مرکز نقطه ی O، وسط پاره خط DE و شعاع OE دایره ای رسم می کنیم. محل برخورد این دایره با عمود منصف DE را M و N می نامیم. چهارضلعی MEND مربع مورد نظر است.

مسئله 10:

مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به اندازه وتر $4\sqrt{2}$ رسم کنید.



راه حل: می دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمود منصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d' را رسم می کنیم. به مرکز O و شعاع $2\sqrt{2}$ دایره ای رسم می کنیم تا دو خط d و d' را در نقطه های A ، B ، C و D قطع کند. در این صورت $ABCD$ مربع به قطر $4\sqrt{2}$ است. به این ترتیب مثلث قائم الزاویه ABC مثلث مورد نظر است.

درس دوم

استدلال:

استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

برای استدلال کردن راه های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد.

انواع استدلال ها در ریاضیات

1- شهودی 2- تمثیلی 3- استقرائی 4- استنتاجی

استدلال شهودی:

استدلال شهودی مبتنی بر درک شهودی است و به نوعی درک بدون استدلال است و به وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی :

تأیید صحت یک اصل ، موضوع یا یک خبری با استفاده از مثال به عبارت دیگر یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون و ارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج.

به طور کلی و با بیان ساده (می توانیم بگوییم) منظور از استدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم با استفاده از مثال و مشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است و در استدلال استقرایی از جزء به کل می رسیم

به عبارت دیگر در استدلال استقرائی ، با استفاده از انجام آزمایش و مشاهده ی تعداد محدودی از مشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم

نکات :

هر استدلالی که بر پایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه از استدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبار آزمایش می نمودند و پس از بررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند

استدلال استقرائی در صورتی عمومیت دارد و قابل استناد است که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود

در استدلال استقرائی از یک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی میگیریم و در واقع از جزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن ها را قبلاً پذیرفته ایم .

نمونه های از انواع استدلال و توجیه و تحلیل هر کدام

نمونه	استدلال	توجیه یا تحلیل
بیان این نکته که "کوه تاه ترین فاصله بین دو نقطه به صورت خط مستقیم است"	شهودی	با استفاده از درک شهودی می توان مشاهده کرد خط مستقیم کوتاه ترین فاصله است
بدست آوردن فاصله ی سیارات از خورشید توسط گالیله	استقرائی	مبنای اولیه کار آنها آزمایش وحدس و بازهم آزمایش بوده است
خارج قسمت اعداد چهار رقمی abab بر ۱۰۱	استنتاجی	با استناد به دانسته هایمان در مورد ارزش مکانی، قانون تقسیم و فاکتورگیری و... این نتیجه محقق می شود
تشخیص اوقات شرعی با استفاده از سایه اشیاء و رویت ستارگان	شهودی	درک به وسیله ی حواس در آنچه که در پیرامون ما می گذشته است
برگ درختان سبز در نظر هوشیار	شهودی	بر پایه شهود است - نظر کردن به نشانه های هستی
هرورقش دفتر نیست معرفت کردگار		حدس و آزمایش نیاز نیست - پیش نیاز نمی خواهد..
		بدون استدلال است

بهترین و محکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. **فرض:** خواص لوزی **حکم:** برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. **فرض:** دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع **حکم:** برابر بودن دو مماس

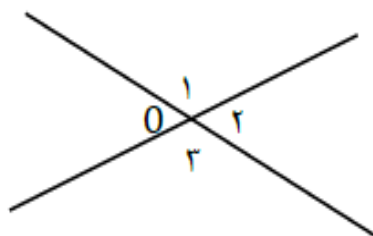
مثال: با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید:

الف) $\left. \begin{array}{l} \text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \\ \text{لوزی نوعی مربع است} \end{array} \right\}$
 $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگرند

ب) $\left. \begin{array}{l} \text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است} \\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است} \end{array} \right\}$
 $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

مثال: ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.

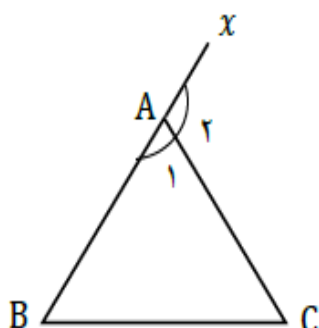
فرض: $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ دو زاویه متقابل به راس **حکم:** $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال: ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.

فرض: $\hat{A}_2$ زاویه ی خارجی مثلث **حکم:** $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \text{ (درجه)} \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (درجه)} \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

(الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) (ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) (ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته: سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند:

(الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) (ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث:

(الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

(ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

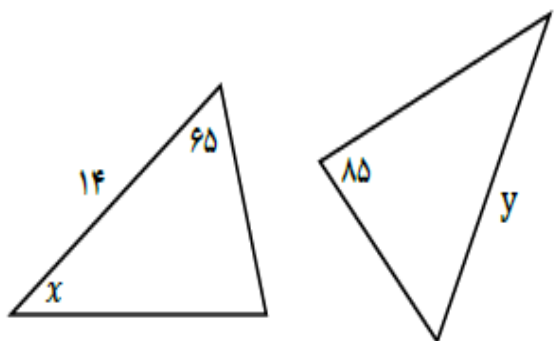
(ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

(د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

(ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته: در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجموع زاویه های داخلی مثلث 180° درجه است) $180 - (85 + 65) = 30$

$$x = 30, \quad y = 14$$

قدم های حل مسئله: برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است:

(۴) راهبرد حل مسئله

(۳) نوشتن فرض و حکم مسئله

(۲) رسم شکل

(۱) درک و فهم مسئله

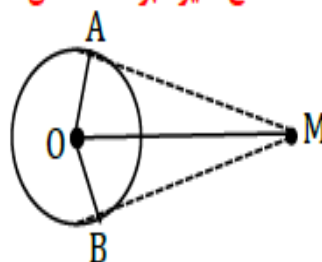
مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

حکم: $MA = MB$



گام دوم: (رسم شکل)

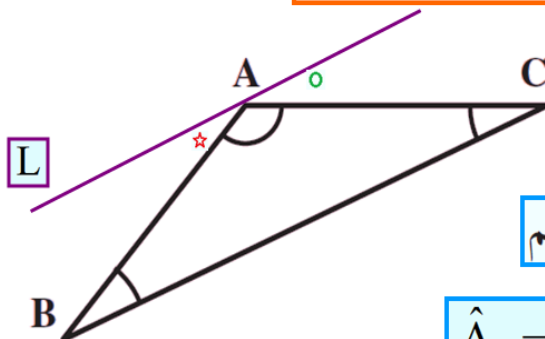
گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$

(اجزای متناظر) (و ض)

قضیه: مجموع زاویه های داخلی مثلث

در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی، 180° است.



از A خطی به موازات BC رسم می کنیم

$\hat{A}_* = \hat{B}$ و خط AB مورب: $L \parallel BC$

$$\hat{A}_O = \hat{C} \text{ و خط } AC \text{ مورب: } L \parallel BC$$

$$\hat{A}_* + \hat{A}_O + \hat{A} = 180^\circ \text{ ولی می دانیم که:}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ پس داریم:}$$

مسئله 1:

ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌ریس اند.

مسئله 2:

نشان دهید سه ارتفاع هر مثلث هم‌ریس اند

مسئله 3:

نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس اند.

قضیه 1:

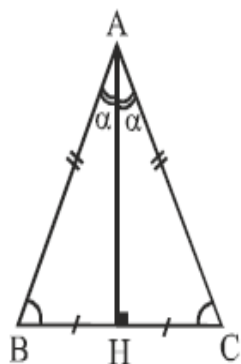
نشان دهید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر است.

مثلث متساوی الساقین: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی الساقین نامیده می شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می نامیم.

1 در مثلث متساوی الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

2 عکس قضیه ی (1) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه های مساوی آن با هم برابرند).

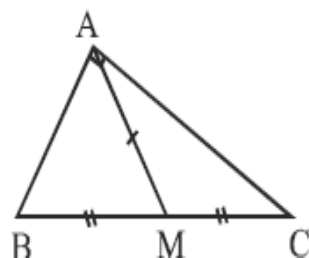
3 در مثلث متساوی الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



4 در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) روابط زیر برقرار است،

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad \text{زاویای مجاور به ساق}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \quad \text{زاویه ی روبه رو به قاعده}$$



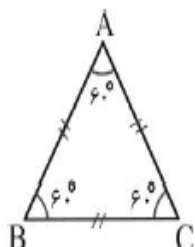
با رسم میانه ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه، دو مثلث متساوی الساقین ایجاد می شود.

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \triangle MAB \\ \triangle MAC \end{matrix} \text{ متساوی الساقین هستند}$$

مثلث متساوی الاضلاع

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی الاضلاع نامیده می شود. زاویه های مثلث متساوی الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه ی آن ها 60 درجه است.

همچنین اگر هر سه زاویه ی مثلثی با هم برابر بودند، می توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

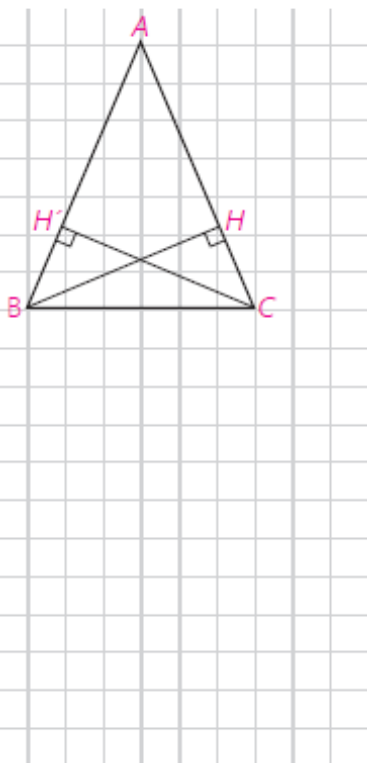
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

تعاریف:



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

توجه:

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

نقیض یک گزاره: همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال:

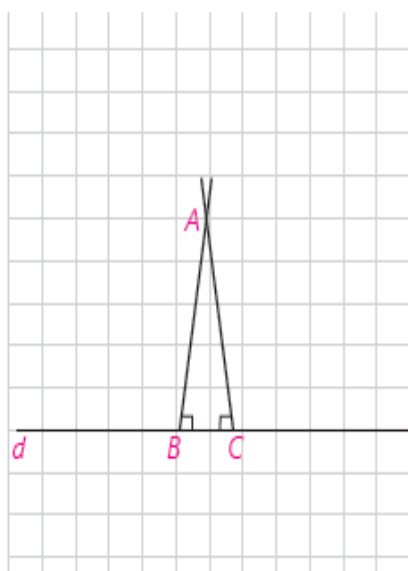
الف) گزاره: « a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن: «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با « a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با « a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»
نقیض آن: «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»
پ) گزاره: «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»
نقیض: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»

برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.
فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.
استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچکتر.

اثبات:

قضیه دوشروطی:

به عبارت $P \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی می‌گویند. P را فرض قضیه و q را حکم آن می‌نامند. در صورتی که

عکس یک قضیه شرطی نیز درست باشد آن قضیه را قضیه دوشروطی می‌نامند.

مثال: الف) قضیه فیثاغورس یک قضیه دوشروطی است.

ب) قضیه تالس در صفحه یک قضیه دوشروطی است.

ج) قضیه تالس در فضا یک قضیه شرطی است و عکس آن درست نیست.

قضیه‌های دوشروطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛

مثال نقض:

مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال: اگر a و b دو عدد اول باشند آنگاه جمع آنها هیچگاه اول نیست. جواب:

$$\left. \begin{matrix} a=2 \\ b=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a+b=5 \quad \text{مثال نقض:}$$

مثال:

مثال های زیر نمونه های از حکم های کلی هستند، برای رد این احکام مثال نقض بیاورید.

الف) «همه اعداد صحیح، مثبت اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهار ضلعی هایی که چهار ضلع برابر دارند)

پ) «مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهار ضلعی های محدب)

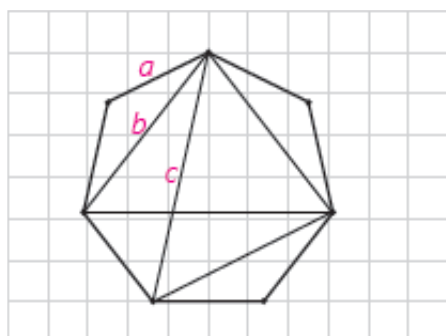
ت) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی

در مورد تمام اعداد طبیعی)

توجه:

اگر درستی یک حکم کلی را بتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز بتوانیم بیابیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کاردکلاس



۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.



تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.

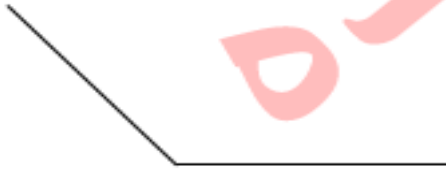
- ۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.
- (الف) هر لوزی یک مربع است.
 - (ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.
 - (پ) هیچ مثلی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.
 - (ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دشرطی بنویسید.

- (الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.
- (ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.
- (پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.
- (ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

سوالات امتحانی فصل اول:

۱	عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید. سپس اگر عکس آنها درست باشد آن را به صورت قضیه دو شرطی بنویسید و اگر عکس آن درست نباشد یک مثال نقض بیاورید. (الف) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت های برابرند. (ب) مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است. (ج) اگر سه ضلع مثلث برابر باشند، هر زاویه آن 60° است. (د) هر کس در خواب زندگی می کند در استان خراسان است.
۲	ثابت کنید: مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است.
۳	قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.
۴	قضیه (نامساوی مثلث): در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.
۵	سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی مترند. اندازه پاره خط هایی که نیمساز زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.
۶	قضیه: عمود منصف های ضلع های هر مثلث هم رسند.
۷	از مثلث ABC ، اندازه ضلعهای $AB=c$ و $AC=b$ و طول ارتفاع h_a معلوم است. مثلث را رسم کنید.
۸	مکان هندسی مرکز دایره ای که روی یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد را تعیین کنید.
۹	هریک از مفاهیم زیر را تعریف کنید.
	(الف) مکان هندسی (ب) عکس قضیه شرطی (ج) زاویه محاطی (د) چند ضلعی محیطی
۱۰	قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند.
۱۱	دایره ی محاطی مثلث را تعریف کرده، اگر شعاع دایره ی محاطی و p نصف محیط مثلث و s مساحت مثلث باشد. ثابت کنید $s = pr$
۱۲	قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برای نصف کمان مقابل آن است
۱۳	کمان در خور زاویه 30° و روبروی پاره خط $AB=4\text{cm}$ را رسم کنید. و مراحل رسم را توضیح دهید.
	موفق باشید. ولی زاده

برای غلط بودن عبارات مثال نقض بزنید . الف) هر چهار ضلعی که قطر هایش منصف باشند، مستطیل هست. ب) نقطه همرسی عمود منصفهای سه ضلع مثلث همواره داخل مثلث است .	صحیح و غلط بودن عبارات را تعیین کنید . الف) جمله ((درس بخوان!)) یک گزاره نیست . ب) مثلثی با اضلاع ۴ و ۸ و ۲۰ قابل رسم است. ج) از دو نقطه فقط یک خط میتوان رسم کرد. د) استدلال استنتاجی بر اساس واقعیتی که درستی آنرا پذیرفته ایم است. ه) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۱۸۰ درجه است.
متوازی الاضلاعی با قطرهای ۳ و ۴ رسم کنید . چند متوازی الاضلاع میتوان رسم کرد ؟ چرا؟	یک لوزی به طول ضلع ۳ و قطر ۴ سانتی متر رسم کنید .
با استفاده از خط کش و پرگار خطی موازی خط دلخواه L از یک نقطه خارج خط رسم کنید.	الف) با استفاده از پرگار نیمساز زاویه ی زیرارسم را کنید. ب) نقاط روی نیمساز چه خاصیتی دارد ؟ 
به روش غیر مستقیم ثابت کنید : اگر در در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه بزرگتر بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر .	ثابت کنید سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرسند . الف) قضیه ((در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن گاه سه زاویه نیز با هم برابرند)) را بصورت دو شرطی بنویسید. ب) نقیض گزاره ی ((هیچ عدد صحیحی بین ۳ و ۴ وجود ندارد.)) را بنویسید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- ۱- اگر نقطه ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی ————— قرار دارد.
- ۲- یک جمله خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد ، ————— نام دارد .
- ۳- اگر نقطه ای از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد ، آن نقطه روی ————— پاره خط قرار دارد .
- ۴- اگر در یک قضیه ، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می شود ————— گفته می شود .

گزینه درست را انتخاب کنید.

- ۱- نقیض گزاره ی " هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد " کدام است ؟

(الف) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه دارد ☐

(ب) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد ☐

(ج) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه ندارد ☐

(د) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه دارد ☐

۲- کدام جمله ی زیر گزاره است ؟

(الف) کتابت را مطالعه کن ☐

(ب) چه هوای خوبی ! ☐

(ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است . ☐

(د) آیا فردا هوا بارانی است؟ ☐
- ۳- برای کدام حکم کلی زیر مثال نقض وجود دارد ؟

(الف) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است ☐

(ب) هر دو مثلث هم نهشت هم مساحت هستند. ☐

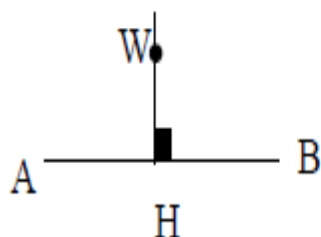
(ج) به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار $n^2 + n + 41$ عددی اول است . ☐

(د) عمود منصف های هر مثلث هم راس اند. ☐

عکس قضیه ی زیر را بنویسید.

" در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند ، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند ."

در شکل مقابل نشان دهید نقطه ی W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است .



تعریف کنید. الف) استدلال استقرایی:	ج) قضیه:
ب) مثال نقض:	
یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ سانتی متر باشند و مراحل کار را رسم کنید.	
ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.	
به کمک استدلال استنتاجی نشان دهید هر سه نیمساز زاویه های داخلی مثلث هم‌رس اند.	
قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند. زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.	
عکس قضیه های زیر را بنویسید. اگر عکس آن نیز درست بود، آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید.	
الف) اگر دو مثلث هم نهشت باشند آنگاه دارای مساحت های برابر هستند.	
ب) اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه اضلاع متناظر شان متناسب هستند.	
با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.	

مفاهیم زیر را تعریف نمایید:

الف) استدلال استنتاجی:

ب) گزاره :

ج) مثال نقض :

د) قضیه اساسی تشابه :

رسم خطی موازی یک خط داده شده از یک نقطه ی خارج آن را با رسم شکل و کلیه مراحل توضیح دهید.

متوازی الاضلاعی رسم نمایید که طول ضلع هایش ۵ و ۶ و طول قطر آن ۸ باشد. (مراحل رسم را توضیح دهید)

ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم راسند. (شکل رسم نمایید)

الف) قضیه نامساوی ها در مثلث را بیان نمایید.

ب) قضیه فوق را اثبات نمایید. (رسم شکل فراموش نشود)

اندازه اضلاع سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ می باشد. اندازه پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه بزرگتر مثلث مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد تعیین کنید.

قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس فرض و حکم آن را تعیین کنید.
در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

سوالات تستی

ردیف	سوالات
1	در کدام یک از اشکال زیر، همواره نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه‌ی تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، برهم منطبق است؟ (۱) مستطیل (۲) لوزی (۳) مثلث (۴) شش‌ضلعی منتظم
2	نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی 70° درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{3}{4}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ (۱) 30° (۲) 40° (۳) 60° (۴) 80°
3	نقطه‌ی M درون مثلث ABC به گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. (۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC (۲) نیم‌ساز رأس A (۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C (۴) نیم‌ساز رأس B
4	عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به وجود می‌آید برابر است با ... (۱) قطری عمود بر AB (۲) وتر موازی و هم‌اندازه با AB (۳) خود وتر AB (۴) قطری موازی با وتر AB

5- مثلث ABC با داشتن مقادیر $b=10$، $c=17$ و $h_a=8$ رسم شده است. مساحت این مثلث کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۶۰ (۴) ۴۸	5
6- نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی 70° درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{3}{4}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ (۱) 30° (۲) 40° (۳) 60° (۴) 80°	6
7- نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. (۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC (۲) نیم‌ساز رأس A (۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C (۴) نیم‌ساز رأس B	7
8- عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ... (۱) قطری عمود بر AB (۲) وتر موازی و هم‌اندازه با AB (۳) خود وتر AB (۴) قطری موازی با وتر AB	8

نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم هستند. دو نقطه‌ی متمایز U و V فاصله‌شان از A برابر

۳ سانتی‌متر و از B برابر x سانتی‌متر است. x در کدام محدوده است؟

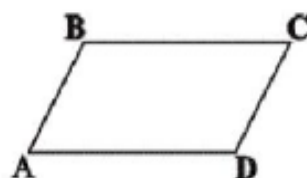
$$x < 1 \quad (2)$$

$$1 < x \quad (1)$$

$$1 < x < 11 \quad (4)$$

$$1 < x < 7 \quad (3)$$

از تقاطع عمود منصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟



(۲) مربع

(۱) مستطیل

(۴) متوازی‌الاضلاع

(۳) لوزی

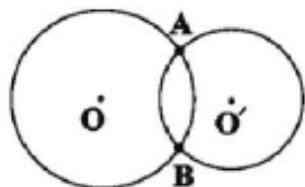
مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و B متقاطع می‌باشند. در این صورت لزوماً:

(۱) OO' از وسط AB می‌گذرد.

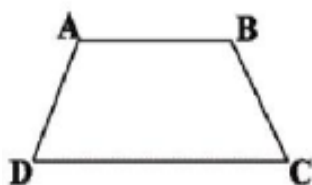
(۲) OO' بر AB عمود است.

$$\angle A O O' = \angle B O O' \quad (3)$$

(۴) هر سه گزینه صحیح است.



در یک دوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و همچنین از قاعده‌ی AD و ساق CD به



یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

(۱) نیم‌سازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$

(۲) عمود منصف‌های دو ساق

(۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها

(۳) عمود منصف CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D

-در مثلث ABC ، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB ، رأس C همواره

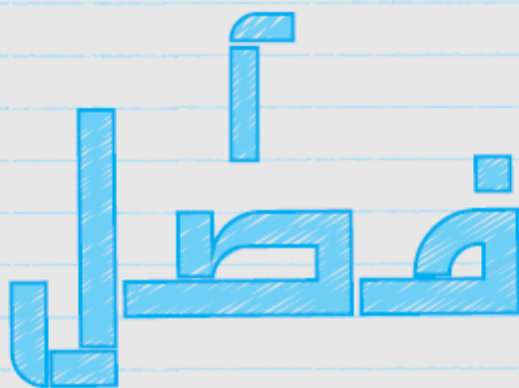
روی کدام گزینه قرار دارد؟

(۲) دایره‌ای به قطر AB

(۱) نیم‌دایره‌ای به قطر AB

(۴) دو خط موازی AB

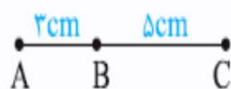
(۳) یک خط موازی AB



قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

نسبت: اگر a و b از یک جنس باشند (یعنی واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکی باشد) آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم.



واضح است که در نسبت $\frac{a}{b}$ همواره $b \neq 0$ می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل نسبت $\frac{AB}{BC}$ برابر $\frac{۳}{۵} = ۰/۶$ است.

تناسب: تساوی میان دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b \cdot d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به b و c وسطین گفته می‌شود، زیرا:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \div b = c \div d$$

ویژگی‌های تناسب

به کمک روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت:

① در هر تناسب، حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین برابر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

② اگر با تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ هر کاری کنیم که تساوی حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین یعنی $ad = bc$ به هم نریزد آن کار مجاز است. این کارهای مجاز عبارتند از:

● طرفین تناسب را می توان معکوس کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

● جای طرفین را با هم و جای وسطین را با هم می توان عوض کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

● ترکیب و تفذیل در صورت یا مخرج تناسب امکان پذیر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$$

● در هر تناسب می توان صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع و تفریق کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

دقت کنید ویژگی فوق را می توان تعمیم داد:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = k \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots}{b_1 + b_2 + \dots} = k$$

③ نکته: به طور کلی اگر در یک تناسب، هر کاری که روی صورت ها انجام می دهیم، همان کار را در مخرج ها نیز انجام دهیم، نسبت حاصل با نسبت های قبلی برابر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ax \pm cy}{bx \pm dy}$$

واسطه هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، مانند تناسب های $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$ یا $\frac{x}{a} = \frac{c}{x}$ ، با طرفین وسطین کردن تناسب به تساوی $x^2 = ac$ می رسیم که در این صورت x را واسطه هندسی a و c می گوئیم.

مثلاً اگر دو پاره خط به طول های ۴ و ۱۶ داشته باشیم، پاره خطی به طول ۸ واسطه هندسی بین آنها است، زیرا $۸^2 = ۴ \times ۱۶$ می باشد.

۱۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x + 2y + 3z$ کدام است؟

۱۶/۴ (۴)

۱۴/۶ (۳)

۱۶/۵ (۲)

۱۵/۶ (۱)

۲- اگر $\frac{24-a}{18-b} = \frac{a}{b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۳- اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، $\frac{2a+2b}{a+2b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{4}$

۴- از تناسب‌های $\frac{a+2b}{3} = \frac{2b-c}{6} = \frac{2(c-2b)}{7} = \frac{1}{4}$ ، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) $3/75$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) $3/25$

۵- نقطه‌های P و Q روی پاره خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. اگر $\frac{BP}{AP} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{QB}{QA} = \frac{3}{4}$ و $PQ = 2$ باشد، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۸ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

۶- در شکل مقابل $OA = 2$ ، $OB = 4$ ، $OC = 5$ و $OD = 7$ می‌باشد. نقطه P بین B و C طوری قرار دارد که

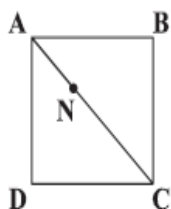


$\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC}$ ، در این صورت طول OP کدام است؟

- (۱) $4/6$ (۲) $4/2$ (۳) $4/8$ (۴) $4/5$

۷- روی پاره خط $AB = 12$ ، دو نقطه M و N را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$ ، در این صورت طول پاره خط MN کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸



۸- در شکل مقابل، طول ضلع مربع ۶ و $\frac{NC}{AN} = \frac{3}{2}$ است. فاصله N از مرکز مربع کدام است؟

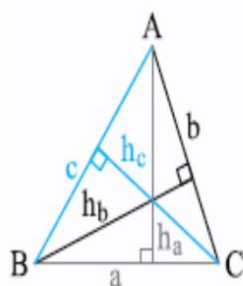
- (۱) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (۳) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

۹- اگر x واسطه هندسی b و c باشد، کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $\frac{x+c}{x+b} = \frac{c}{x}$ (۲) $\frac{x-c}{x-b} = \frac{c}{x}$ (۳) $\frac{x+c}{x+b} = \frac{c}{b}$ (۴) $\frac{x-c}{x-b} = \frac{c}{b}$

رابطه اضلاع و ارتفاع‌ها در مثلث

می‌دانیم مساحت هر مثلث از رابطه «ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ » به دست می‌آید، یعنی:



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

با تبدیل هر یک از برابری‌های فوق به یک تناسب، می‌توان گفت «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.» مثلاً:

$$\frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b \Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

نتیجه: هر رابطه هم‌درجه‌ای که بین اضلاع یک مثلث برقرار باشد (چه رابطه مساوی، چه رابطه نامساوی)، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است. مثلاً:

در یک مثلث قائم‌الزاویه که رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در آن برقرار است، رابطه $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ نیز در آن برقرار می‌باشد.

سوال:

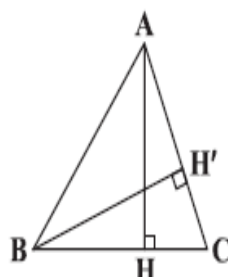
۱- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{AH}{BH'}$ با کدام نسبت برابر است؟

(۴) $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$

(۳) $\frac{BC}{AC}$

(۲) $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

(۱) $\frac{AC}{BC}$



۱۱- در مثلث ABC با طول اضلاع $a = 5$ ، $b = 6$ و $c = 9$ ، حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_a}$ کدام است؟

(۲) $\frac{45}{79}$

(۴) $\frac{79}{45}$

(۱) $\frac{78}{53}$

(۳) $\frac{53}{78}$

۱۲- در مثلث ABC ، طول اضلاع $a = 4$ ، $b = 6$ و $c = 8$ می باشد. حاصل $\frac{h_a^2}{h_b h_c}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴

۱۳- در مثلث ABC ، اگر $a < b < c$ باشد، کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) $h_a < h_b < h_c$ (۲) $h_a > h_b > h_c$ (۳) $h_b > h_c > h_a$ (۴) $h_b > h_a > h_c$

۱۴- در مثلث ABC ، اگر $a = 4$ ، $b = 6$ و $h_c = h_a + h_b$ باشد، اندازه ضلع c کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{6}$ (۳) $\frac{2}{8}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۱۵- در مثلثی اندازه های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم کدام

نجری خارج ۹۵

است؟

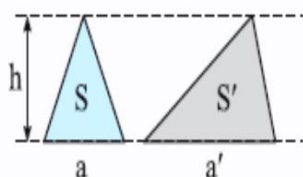
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۸

۱۶- در مثلث ABC ، اگر $h_a \times h_b = 16$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{ab}$ (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ (۳) $2\sqrt{ab}$ (۴) $4\sqrt{ab}$

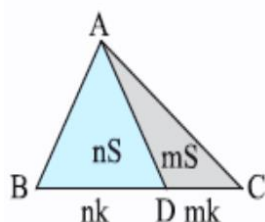
مساحت مثلث‌های هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

① با توجه به این که مساحت مثلث از رابطه «ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ » به دست می‌آید، اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازه قاعده‌هایی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.



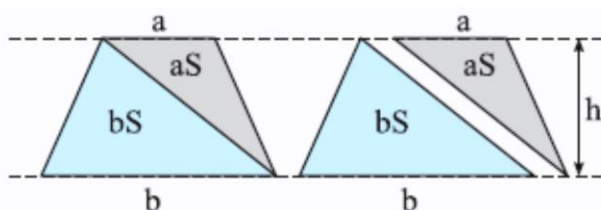
$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

اثبات:

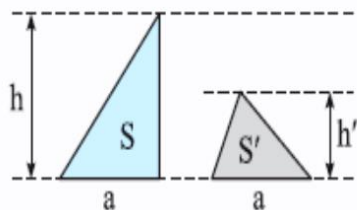


② **نتیجه:** الف) اگر خطی از یک رأس مثلث طوری رسم شود که قاعده را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، مساحت مثلث هم به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌شود.

ب) در دوزنقه‌ها وقتی یک قطر رسم می‌شود، نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده برابر نسبت قاعده‌ها است.



۱۶ اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه ارتفاع‌های وارد بر این قاعده‌ها است.

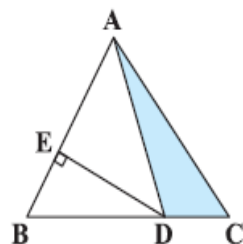


$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

اثبات:

سوال:

۱۸- در شکل مقابل، $AB = ۸$ ، $DE = ۶$ و $۲BD = ۳DC$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



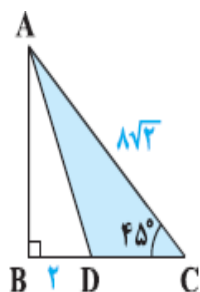
۱۸ (۱)

۱۶ (۲)

۱۲ (۳)

۲۰ (۴)

۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



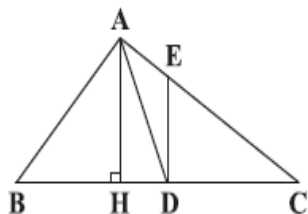
۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۲۰- در شکل مقابل، $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$ ، $CD = 6$ و $AH = 8$ می باشد. مساحت مثلث ADE کدام است؟



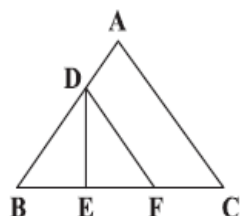
(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۴

(۴) ۹

۲۱- در شکل مقابل، $AD = 2BD$ و مساحت مثلث ABC برابر ۳۶ است. اگر $BE = EF = FC$ باشد،



مساحت مثلث DEF کدام است؟

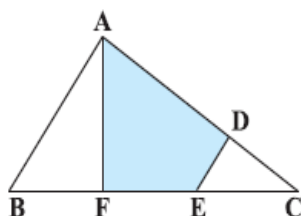
(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۱۲

۲۲- در شکل مقابل، $AD = 2DC$ و $BF = FE = EC$ می باشد. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۰ باشد،



مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱) ۶۰

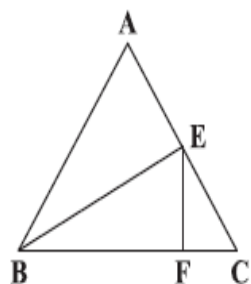
(۲) ۴۸

(۳) ۴۰

(۴) ۳۶

۲۳- در شکل مقابل، E وسط ضلع AC و $BC = 3CF$ می باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ باشد،

مساحت مثلث BEF کدام است؟



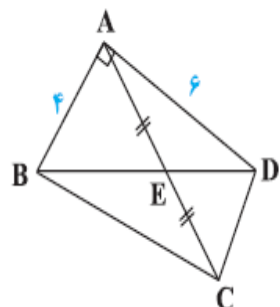
۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

۱۶ (۴)

۱۸ (۳)

۲۴- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



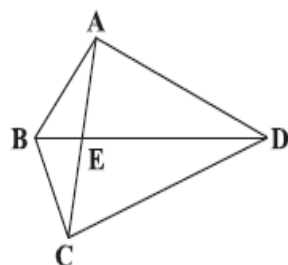
۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۲۷ (۳)

۳۲ (۴)

۲۵- در شکل مقابل، $ED = 4BE$ می باشد. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت چهارضلعی است؟



$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$\frac{2}{7}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

فعالیت ۱

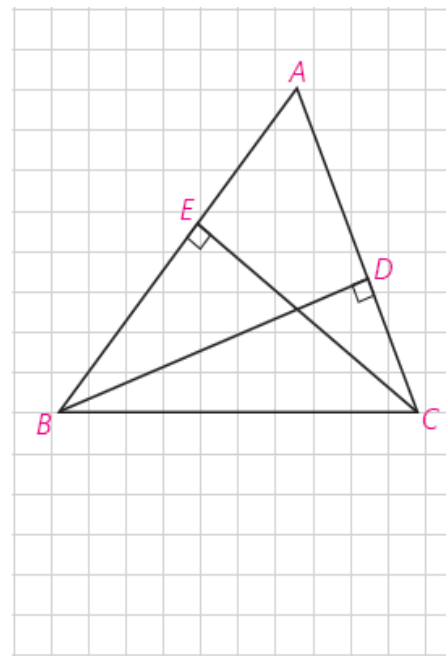
مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times \dots$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

— عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین: $AC \times \dots = \dots \times \dots$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟



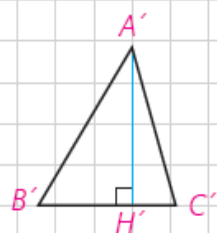
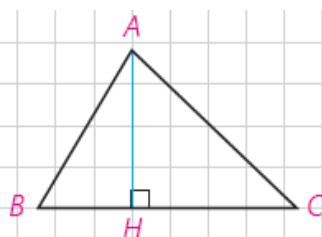
فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و $A'H'$ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$) با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

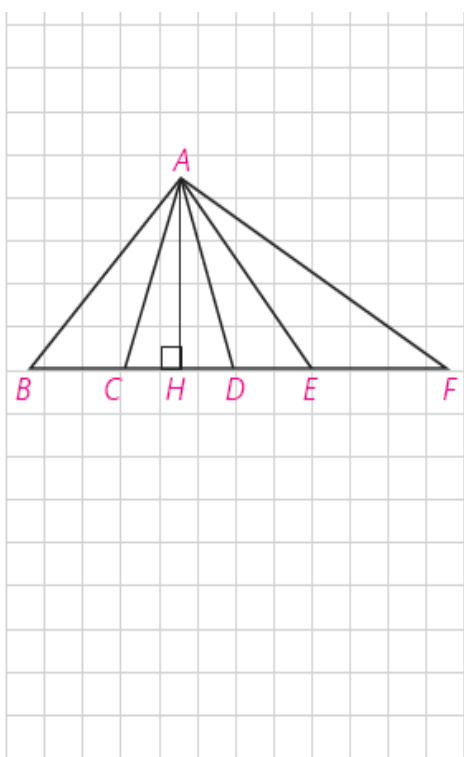
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \dots \times \dots}{\frac{1}{2} \dots \times \dots} = \dots$$



نتیجه ۱

هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه این مثلث‌ها کدام پاره خط است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\dots}{\dots}$$

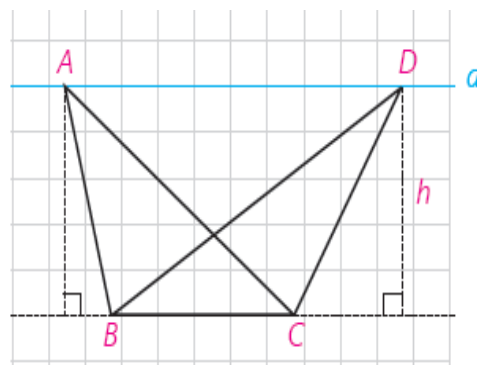
نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$

کاردکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

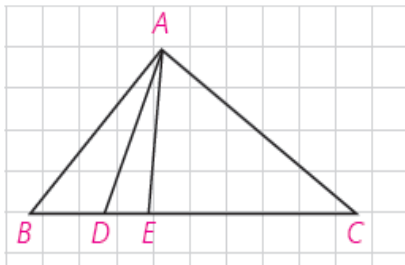


تمرین

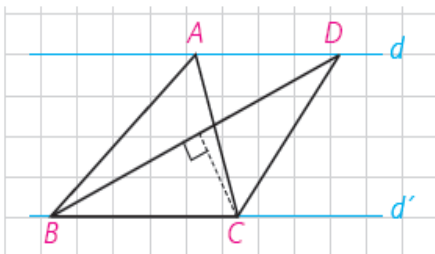
۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



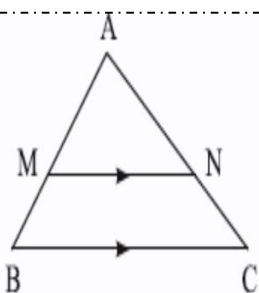
۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.



۵- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 8cm^2 است. اگر $BD = 6\text{cm}$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.



قضیه تالس



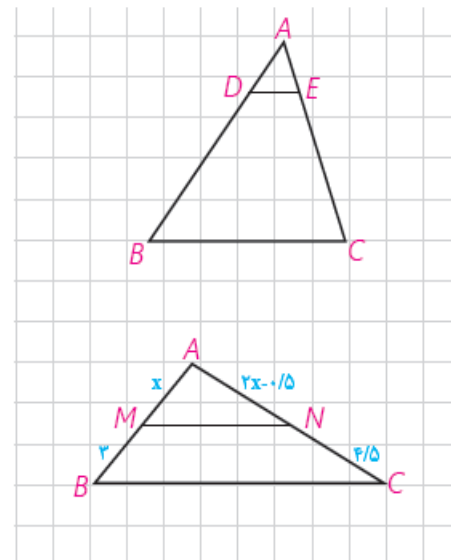
۱- **قضیه تالس:** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

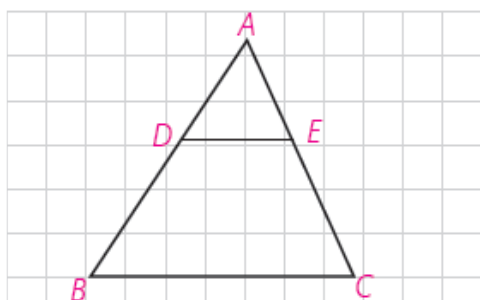
اثبات:

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=0/8$. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.



۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$; به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.

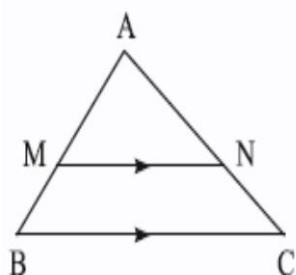


۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$; تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

نکته: به کمک خواص تناسب می توان قضیه تالس را به صورت های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{AN + NC}{NC} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$



۲. تعمیم قضیه تالس (تالس جزء به کل): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را

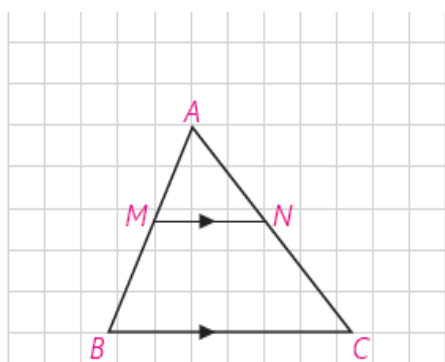
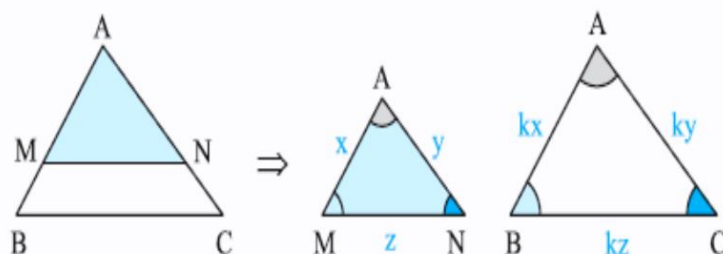
قطع کند، آن گاه مثلثی پدید می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است. به طور کلی اگر طول

پاره خط MN جزء داده ها یا خواسته های مسأله باشد، از تالس جزء به کل استفاده می کنیم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اثبات:

📌 **نتیجه:** اضلاع مثلث AMN با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب است و در ضمن زاویه‌های آنها نیز برابر می‌باشد (دو مثلث متشابه‌اند).

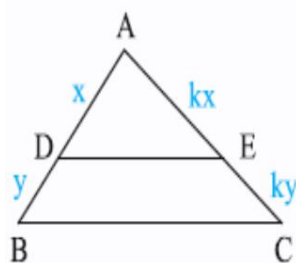


کاردکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

..... $\Rightarrow$

۳. **عکس قضیه تالس:** اگر در یک مثلث خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آنگاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.

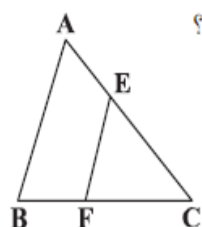


$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات:

سوال:

۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel FE$ ، $BF = m + 1$ ، $AE = 3m + 1$ و $\frac{EC}{FC} = \frac{5}{3}$ می باشد. طول پاره خط AE کدام است؟



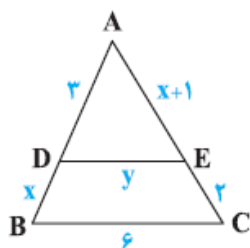
۲ (۲)

۳ (۱)

۳ (۴)

۵ (۳)

۳۰- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ است. $x + y$ کدام است؟



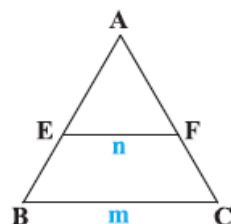
۵/۶ (۱)

۶ (۲)

۴/۶ (۳)

۵ (۴)

۳۱- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ ، $AB = 12$ ، $BC = m$ و $EF = n$ می باشد. اگر $2m^2 - mn - 3n^2 = 0$



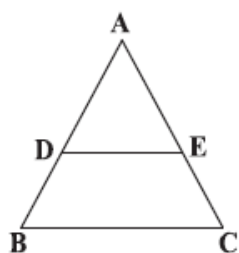
باشد، طول پاره خط AE کدام است؟

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۹ (۴)

۶ (۳)



۳۲- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ ، $DE = 3$ و $BC = 4$ است. حاصل $\frac{AD + AE}{DB + EC}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۳

(۴) $\frac{2}{7}$

(۳) $\frac{2}{5}$

۳۳- در شکل مقابل، تمام پاره‌های افقی موازی قاعده BC می‌باشند. اگر $EF = FL = LN = NB$ ،

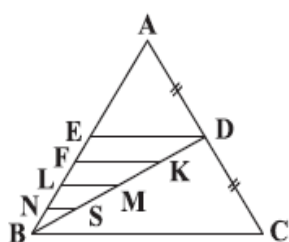
$NS = 2$ و D وسط ضلع AC باشد، طول ضلع BC کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۱۴



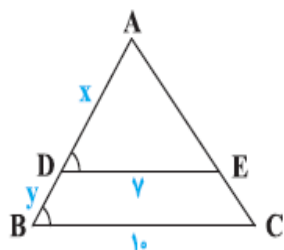
۳۴- در شکل مقابل، $\hat{B} = \hat{D}$ می‌باشد. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\frac{7}{10}$

(۴) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{7}{3}$



۳۵- در شکل مقابل، $AD \parallel BC$ و $AB \parallel CE$ می باشد. اگر $AD = 4$ ، $AB = 6$ و $EC = 15$ باشد، طول BC

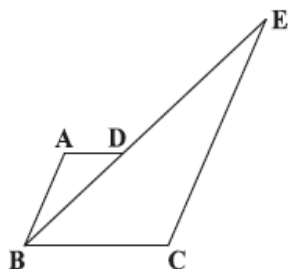
کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۷



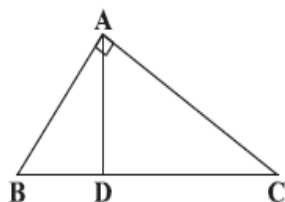
۳۶- در شکل مقابل، $AD = 4$ ، $BD = 2$ و $DC = 6$ می باشد. طول ضلع AC کدام است؟

(۲) $2\sqrt{6}$

(۱) ۶

(۴) $2\sqrt{10}$

(۳) $4\sqrt{2}$



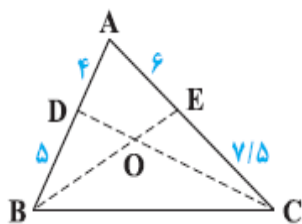
۳۸- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ تجزیه خارج ۸۷

(۲) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{2}{3}$

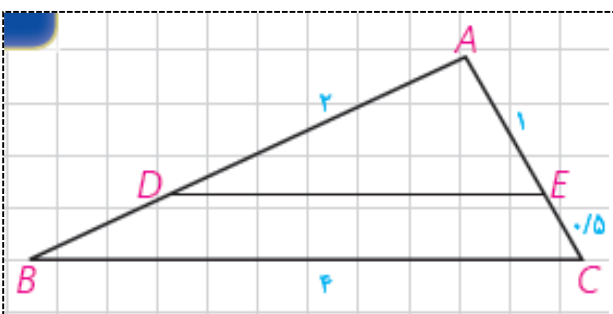
(۴) ۱

(۳) $\frac{5}{6}$

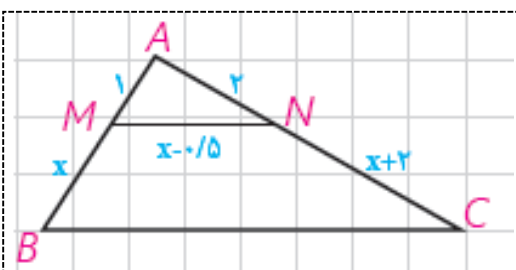




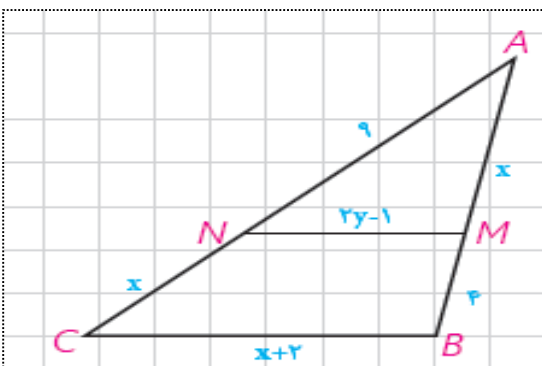
۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ با توجه به اندازه پاره خطها، طولهای AB و DE را به دست آورید.

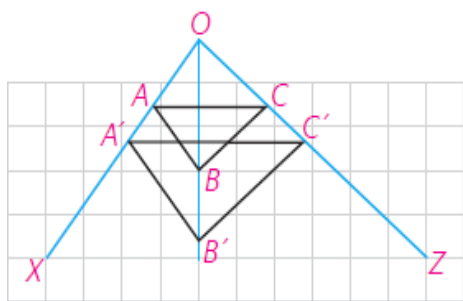


۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ ؛ مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

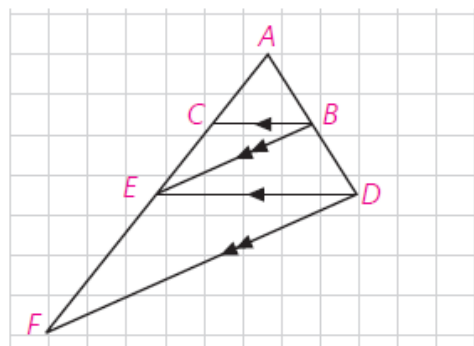


۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.

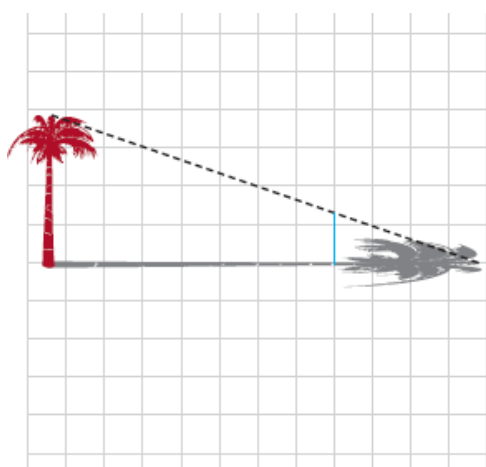




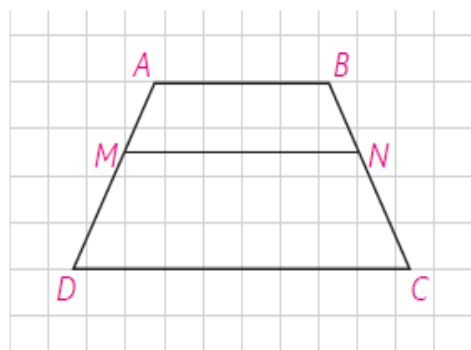
۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



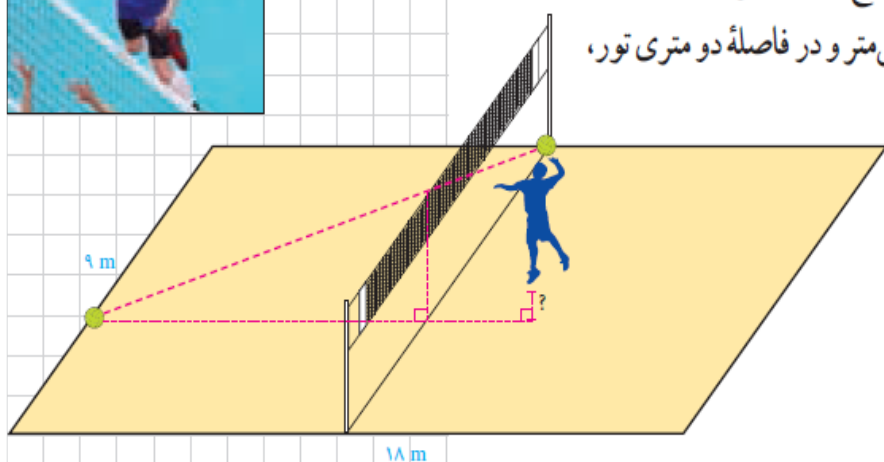
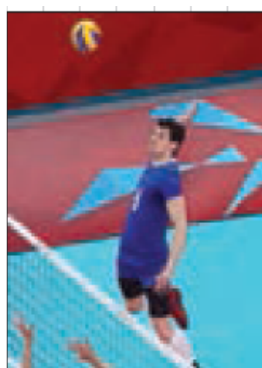
۶- یکی از کاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایهٔ درخت 6° متر، طول سایهٔ شاخص 3° متر و طول شاخص 1° متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷- در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (\text{قضیه تالس در ذوزنقه})$$

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع 9×9 تفکیک می شود و تور والیبال مردان با ارتفاع $2/43$ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد 180° سانتی متر و در فاصله دو متری تور،

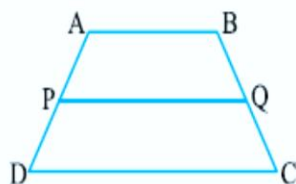
به هوا می پرد و تویی را که در ارتفاع 30° سانتی متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟

قضیهٔ میان خط در دوزنقه

اگر وسط دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره خطی به دست می‌آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات:

مثال ثابت کنید دو قطر دوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره خطی جدا می‌کنند که اندازه آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.



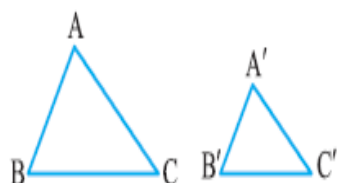
مثال در دوزنقه شکل روبه‌رو، پاره خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{m}{n}$ ، نشان دهید

$$PQ = \frac{n \cdot AB + m \cdot CD}{m + n}$$



تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دوبه‌دو برابر و اضلاع متناسب هستند.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

اثبات:

توجه 1:

ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیه اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱ حالت دو زاویه برابر

۲ حالت سه ضلع متناسب

۳ حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر

توجه 2:

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

باشد، تناسب $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

۱. اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه روی زاویه های برابر باشند.

۲. در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع های AH

و $A'H'$ ، نیمسازهای AD و $A'D'$ ، میانه های AM و $A'M'$ که معنایش تناسب $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = \dots = k$ است.

۳. نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آنها برابر k^2 است.

مثال در مثلث ABC ، نقاط M ، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:

الف) نشان دهید $\triangle MNP \sim \triangle ABC$.

ب) نشان دهید محیط مثلث MNP ، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP ، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

مثال یک نقطه دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می کنیم تا مثلث به شش

ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجاد شده را S_1 ، S_2 و S_3 می نامیم. نشان دهید: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

قضایای تشابه مثلث ها:

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات:

قضیه ۲: هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

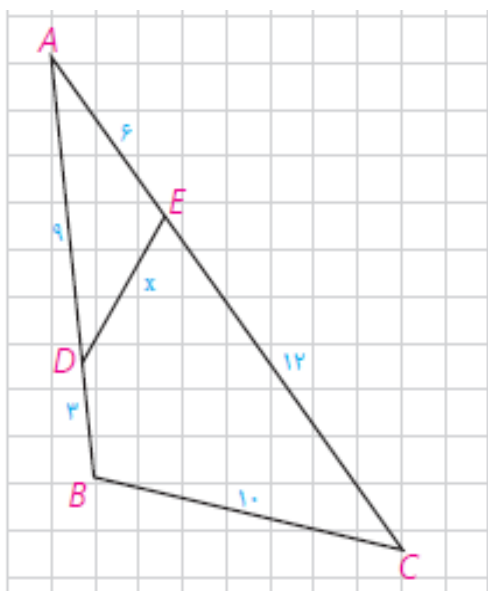
قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

مثال: در مثلث ABC ، از نقطه M وسط AC ، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.



اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

سوال 1:

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

حل:

سوال 2:

در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

$$۱) AB^2 = BC \cdot BH$$

$$۲) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$۳) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$۴) AH^2 = BH \cdot CH$$

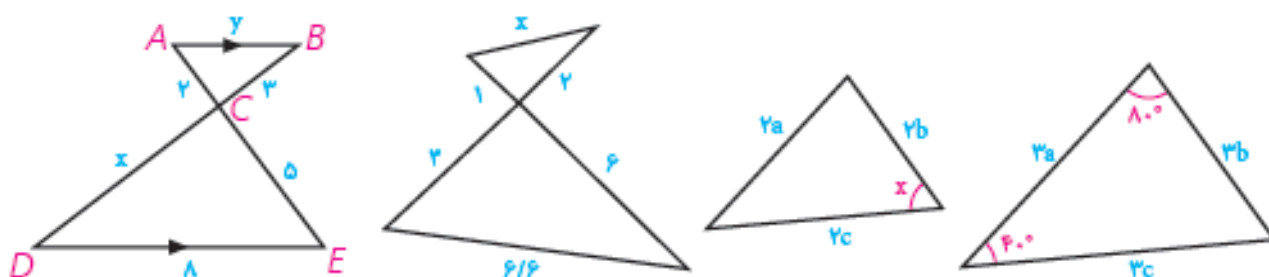
$$۵) AH \times BC = AB \times AC$$

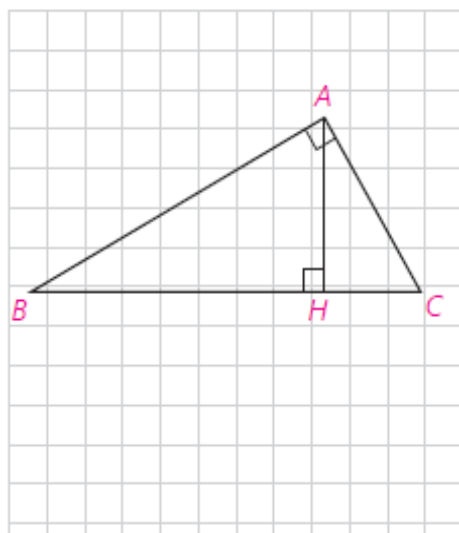
حل:



تمرین

۱- در هر یک از شکل های زیر، تشابه مثلث ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید :





۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

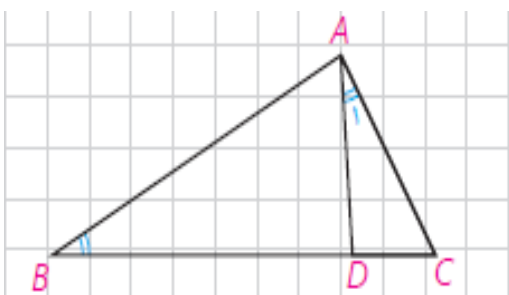
۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

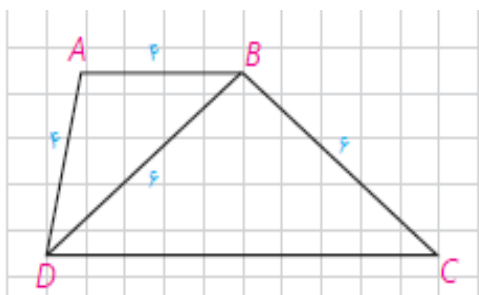
۲) $AB=10$, $BC=12$, $AC=?$, $AH=?$

۳) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

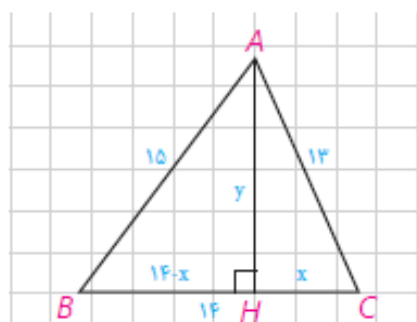
۴) $AB=8$, $AH=4$, $BC=?$, $AC=?$

۳- در شکل روبه رو $\angle A_1 = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.



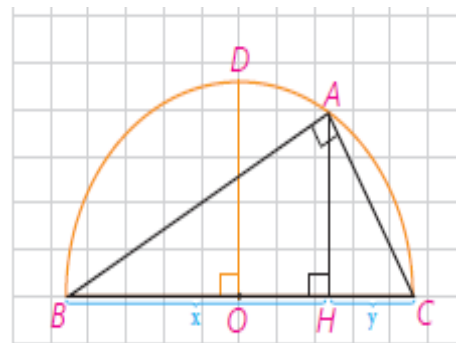


۴- در شکل روبه‌رو ABCD دوزنقه است. طول قاعده CD را به دست آورید.



۵- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۷- در شکل مقابل نیم دایره ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه دلخواه A روی محیط نیم دایره است.
الف) چرا زاویه A قائمه است؟



ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$$OD \square AH$$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

ت) آیا می توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

- ۸- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
- الف) عکس این قضیه را بنویسید.
- ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.
- (۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.
- (۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.
- (۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.
- (۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.
- ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.

پرسش های چهارگزینه ای

۱- اگر $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_n}{n}$ ، آن گاه حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ چند برابر a_1 است؟

- (۱) n (۲) $n(n+1)$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴) $2n$

۲- اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ (۲) $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ (۳) $\frac{b-c}{a-b} = \frac{b}{c}$ (۴) $\frac{b+c}{a+b} = \frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b} = \frac{2c}{3d} = k$ ، آن گاه حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 8a^2c^2 + 16c^2}}{b^2 + 9d^2}$ کدام است؟

- (۱) k (۲) $2k$ (۳) k^2 (۴) $4k^2$

۴- اگر $k > 0$ ، $\frac{a}{2b} = \frac{3c}{d} = \frac{4e}{2f} = k$ ، حاصل $\frac{\sqrt{a^2 + 9c^2 + 16e^2}}{\sqrt{4b^2 + d^2 + 4f^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{k}$ (۲) k (۳) $2\sqrt{k}$ (۴) $4k$

۵- اگر $AB = a$ و $\frac{MA}{MB} = k$ ($k > 1$)، طول پاره خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

۶- اگر $AB = a$ و $\frac{NA}{NB} = k$ ($k > 1$)، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

- (۱) $\frac{ka}{k+1}$ (۲) $\frac{a}{k+1}$ (۳) $\frac{a}{k-1}$ (۴) $\frac{ka}{k-1}$

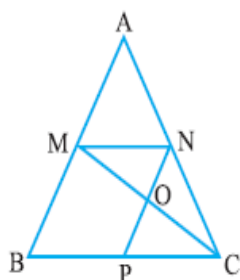
۷- اگر $AB = a$ و N نقطه ای روی امتداد AB باشد به گونه ای که $\frac{NA}{NB} = k$ ($k < 1$)، طول NB کدام است؟

- (۱) $\frac{ka}{1+k}$ (۲) $\frac{a}{1+k}$ (۳) $\frac{a}{1-k}$ (۴) $\frac{ka}{1-k}$

۸- اگر AB و MN دو پاره خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ و طول پاره خط $AB = a$ ، آن گاه طول پاره خط MN کدام است؟

(۱) $\frac{ak}{k^2 - 1}$ (۲) $\frac{2ak}{k^2 - 1}$ (۳) $\frac{ak}{1 - k^2}$ (۴) $\frac{2ak}{|1 - k^2|}$

۹- در شکل مقابل، $MNPB$ متوازی الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN ، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد، نسبت PC به MN کدام است؟

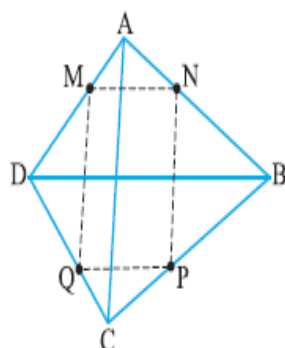


(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۰- وسط های اضلاع هر چهار ضلعی الزاماً رئوس کدام چهار ضلعی هستند؟

(۱) لوزی (۲) متوازی الاضلاع (۳) مستطیل (۴) مربع

۱۱- در شکل مقابل، $MNPQ$ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای $ABCD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{5}$ ، نسبت



قطر AC به BD کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، مربعی چنان محاط کرده ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر

ضلع مربع x باشد، آن گاه حاصل $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ کدام است؟

(۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $2x$ (۴) $\frac{2}{x}$

۱۳- در مثلث ABC ، از نقطه M وسط ضلع BC ، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC = 9$ و $BE = 8$ ، طول CF کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات:

مثال: در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به دست آورید.

مثال اگر در مثلث ABC ، AD و AD' به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD ، CD ، CD' و DD' را بر حسب اضلاع مثلث بیابید.

پاسخ:

۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

اثبات:

کاردکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

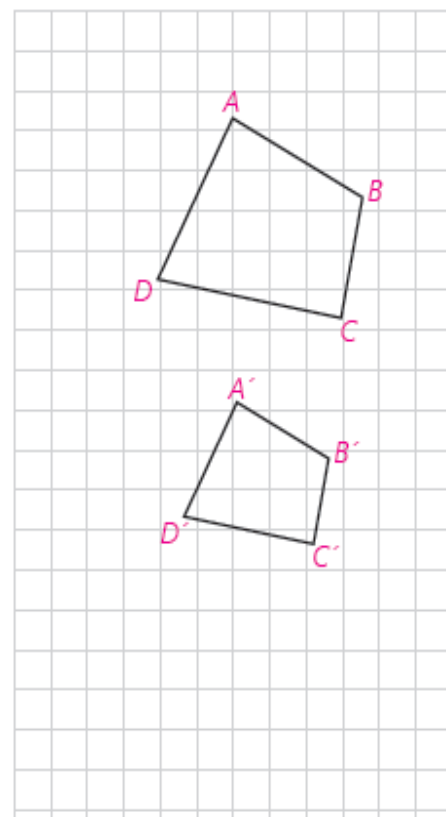
۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$



توجه:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.



کاردکلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10° و 18° واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها 12 واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

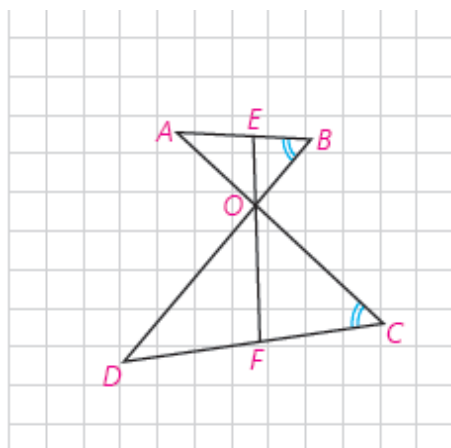
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 1 \text{ cm}$ و زاویه متقابل به رأس O است و $\angle B = \angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

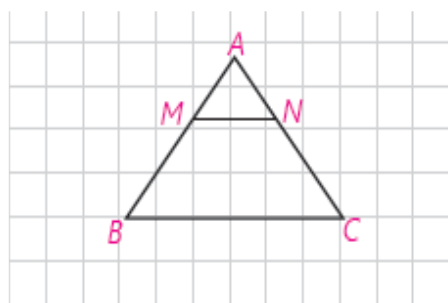
ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.



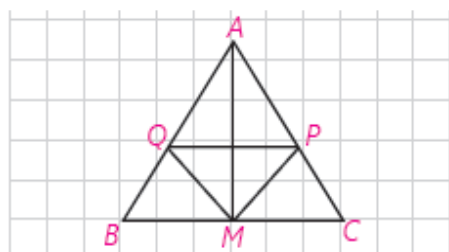
تمرین

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 10 و 12 و 15 سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10 سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.



۲- در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

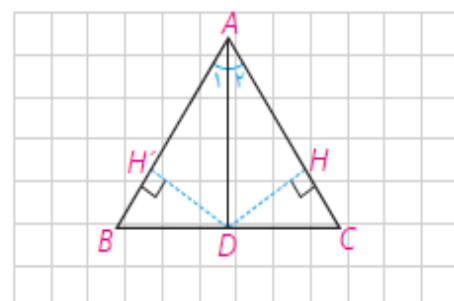
۳- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.



۴- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

$$PQ \parallel BC$$

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.
الف) با توجه به نتیجه (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.



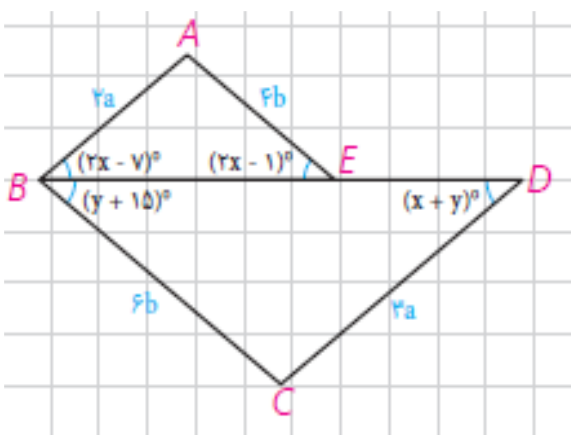
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

ب) چرا $DH=DH'$ ؟ با توجه به این موضوع و نتیجه (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

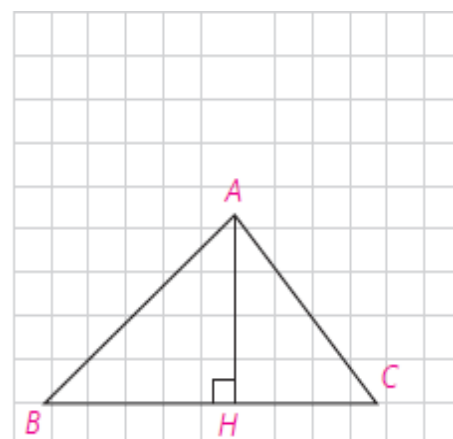
ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



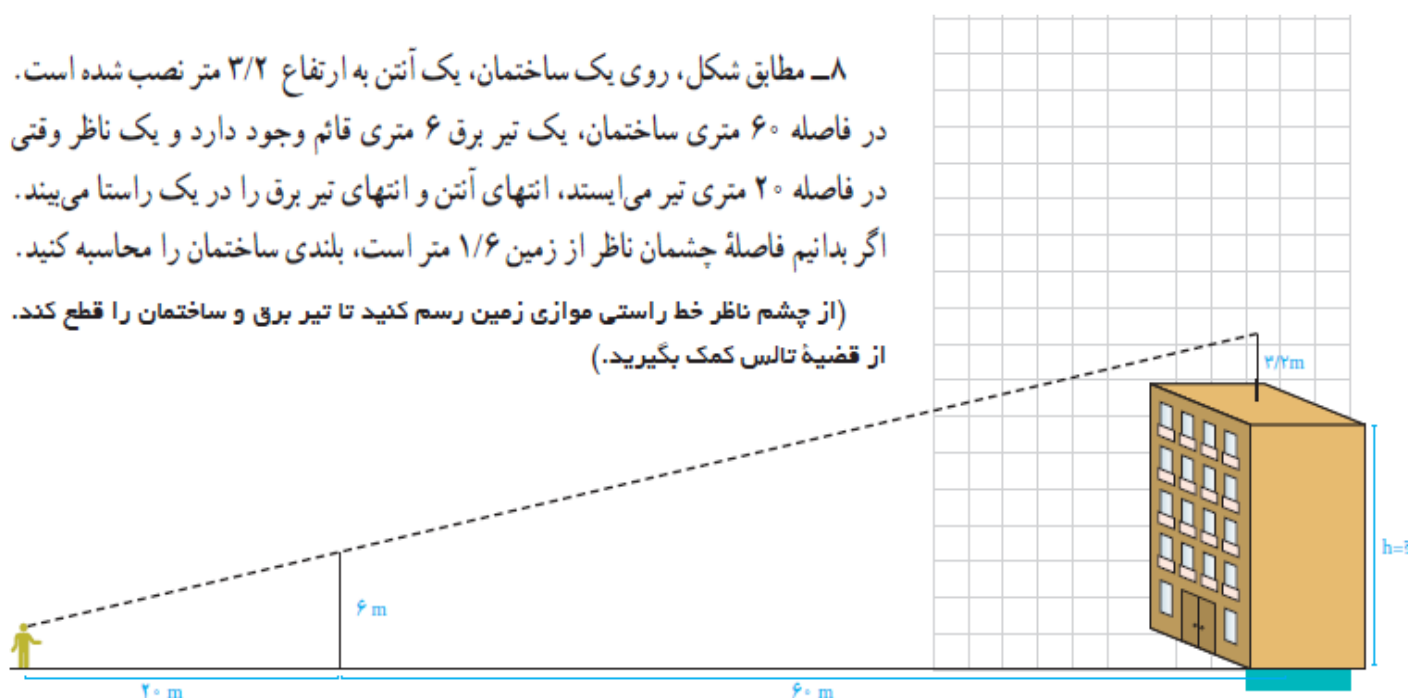
۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع، الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$



ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $\frac{3}{2}$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشمان ناظر از زمین $\frac{1}{6}$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)



۱- جاهای خالی را کامل کنید .

الف) مثالی که نشان می دهد ، یک حکم کلی نادرست است را می نامند .

ب) ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه ، آن را به دو مثلث تقسیم می کند .

ج) اگر نقطه ای روی یک پاره خط قرار داشته باشد ، آن نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

د) در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی از هر زاویه ی داخلی غیر مجاورش است .

۲- عکس قضیه ی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت یک قضیه ی دو شرطی بنویسید .

اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد ، قطرهايش همدیگر را نصف می کند .

۳- روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و شکل دقیق آن را رسم کنید .

۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ سانتی متر و طول یک قطر آن ۶ سانتی متر می باشد . طریقه ی رسم را توضیح دهید .

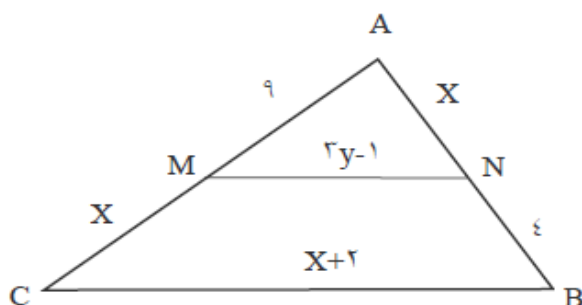
۵- طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی متر است . بلند ترین ارتفاع آن $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ سانتی متر می باشد . طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید .

۶- روش برهان خلف ثابت کنید . اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر ، بزرگ تر است .

۷- ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم‌رسند .

۸- اگر $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $x + y + z$ را بیابید .

۹- در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بیابید .

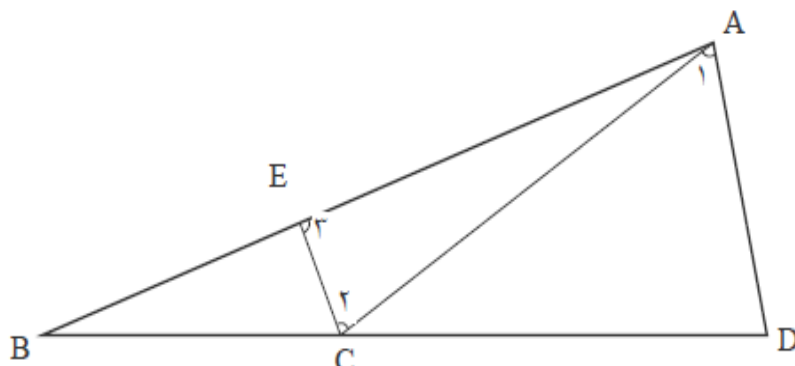


۱/۵

۱۰- در دوزنقه ی $ABCD$ ، $(BC \parallel AD)$ امتداد ساق ها یکدیگر را در نقطه ی O قطع می کنند از C خطی به موازات قطر BD رسم کرده تا امتداد AB را در E قطع کند . ثابت کنید :

۱

۱۱- در شکل مقابل زوایای $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ اگر $AB=15$ و $AC=6$ باشد $\frac{BD}{CD}$ را بیابید .



۱/۵

۱۲- قضیه : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند .

۱/۵

۱۳- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه ی هندسی است بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر .

۱/۵

۱۴- اندازه ی سه ضلع مثلثی ۱۶ و ۲۲ و ۱۹ سانتی متر هستند . اندازه ی پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه متوسط بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید .

۱/۵

۱۵- اندازه های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ می باشد . اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ متشابه باشد آن گاه مساحت مثلث دوم را بیابید .

موفق باشید

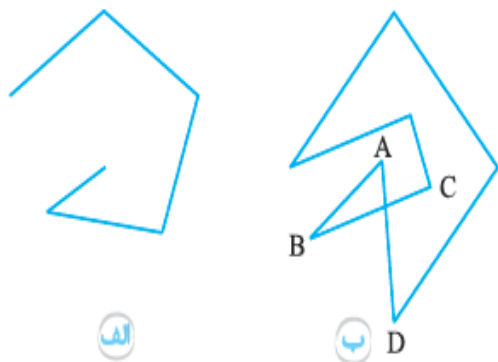


چندضلعی

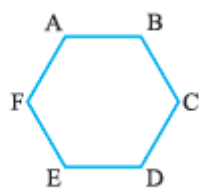
شکلی است بسته که از اجتماع حداقل سه پاره خط تشکیل شده باشد (در حقیقت شامل $n \geq 3$ پاره خط)، طوری که نقاط انتهایی آن پاره خطها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ای متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر هر دو پاره خطی که در یک انتها مشترک‌اند، خودشان در یک امتداد نباشند (با هم زاویه‌ای غیر از 180° بسازند)؛ هم‌چنین پاره خطها فقط در نقاط انتهایی‌شان، یکدیگر را قطع کنند. مثلاً شکل‌های الف و ب که رسم شده‌اند چندضلعی نیستند:

الف به دلیل این که یک شکل بسته نیست، چندضلعی نمی‌باشد.

ب هم به دلیل این که AD و BC یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی خود قطع کرده‌اند، چندضلعی نخواهد بود.



اما شکل زیر یک چندضلعی است:

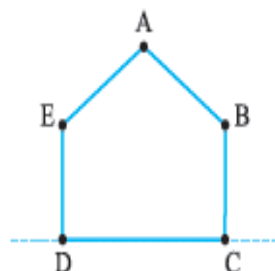


در این چندضلعی، پاره‌خط‌های AB ، BC ، CD ، DE ، EF و FA اضلاع چندضلعی (شش ضلعی) $ABCDEF$ بوده و نقاط A ، B ، C ، D ، E و F رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطه‌ی مشترک آن دو ضلع را رأس می‌گوییم. هم‌چنین رئوس دو سر یک ضلع، رئوس مجاورند (مثل E و D). اگر تعداد اضلاع یا رئوس یک چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌گوییم.

تعریف n ضلعی محدب،

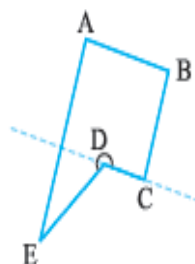
یک n ضلعی را محدب می‌گوییم هرگاه با امتداد هر ضلع از طرفین، کل شکل (بقیه‌ی نقاط چندضلعی) در یک طرف آن

واقع شوند. به عبارت دیگر تمام زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب، کمتر از 180° است.



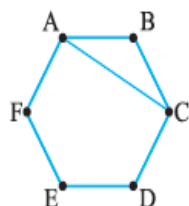
مطابق شکل، پنج‌ضلعی $ABCDE$ یک پنج‌ضلعی محدب است. در این شکل ضلع CD را از طرفین امتداد داده‌ایم و کل شکل یک طرف این خط قرار گرفته است (شما هم هر دفعه یکی از اضلاع را امتداد دهید و محدب‌بودن پنج‌ضلعی $ABCDE$ را بررسی کنید). هم‌چنین تمام زاویه‌های داخلی مثل $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ ، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ قطعاً کمتر از 180° است.

اگر n ضلعی، محدب نباشد آن را مقعر می‌گوییم. در n ضلعی مقعر با امتداد حداقل یکی از اضلاع، قسمتی از شکل در یک طرف و بقیه‌ی شکل در طرف دیگر خط موردنظر واقع می‌شود. در حقیقت حداقل یکی از زاویه‌های داخلی n ضلعی مقعر بیش از 180° است.

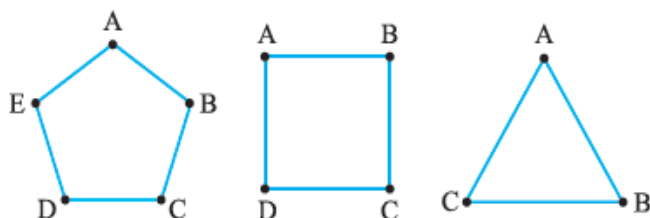


مطابق شکل پنج‌ضلعی $ABCDE$ مقعر است. با امتداد ضلع CD از طرفین، قسمتی از شکل در یک طرف این خط

قرار می‌گیرد؛ در حقیقت $\hat{CDE} > 180^\circ$.



تعریف قطر در چندضلعی، پاره‌خطی است که رئوس غیرمجاور در یک n ضلعی را به هم وصل می‌کند.
در شکل روبه‌رو رئوس A و C غیرمجاور بوده و پاره‌خط AC را قطر این شش‌ضلعی می‌گوییم.



مثال مطابق شکل‌های روبه‌رو یک سه‌ضلعی (مثلث)، یک چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی وجود دارند. از هر رأس به تمام رئوس دیگر وصل کنید و تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده را بیابید.

توجه:

با استفاده از استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی، از جمله ضلع و قطر، عبارت است از $\frac{n(n-1)}{2}$. (البته با استفاده از خواص دنباله یا تصاعد حسابی می‌توان ثابت کرد که تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در n ضلعی یعنی $0+1+\dots+(n-2)+(n-1)$ برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$).

مثال 1:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (ضلع‌ها و قطر‌ها) در یک ۱۰ ضلعی را بیابید.

مثال 2:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی برابر است با 10 . مقدار n را بیابید.

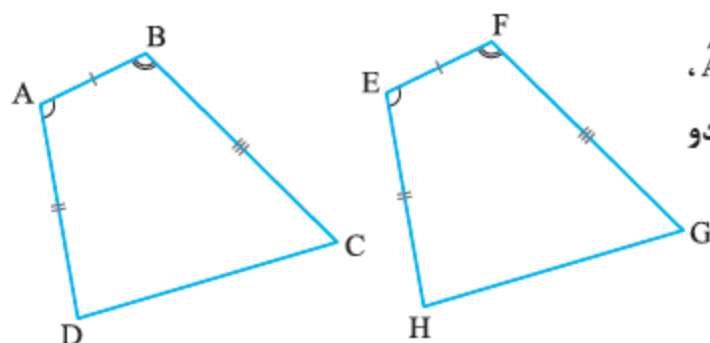
سوال 1:

با توجه به تعریف قطر، فرمولی برای پیدا کردن تعداد کل قطرهای مرسوم در یک n ضلعی محدب بیابید.

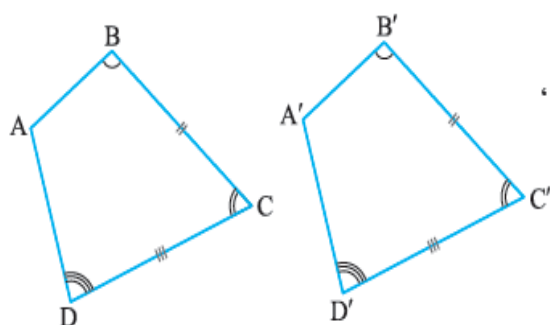
مثال 3:

تعداد قطرهای یک هفت‌ضلعی را بیابید.

سوالات امتحانی:



۱- در دو چهارضلعی مقابل $AD = EH$ ، $\hat{A} = \hat{E}$ ، $AB = EF$ ، $\hat{B} = \hat{F}$ و $BC = FG$. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.



۲- در شکل روبه‌رو دو چهارضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با شرط‌های $\hat{C} = \hat{C}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{D} = \hat{D}'$ رسم شده‌اند. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.

۳- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی منتظم برابر است با ۲۸. در این صورت هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

۴- تعداد قطرهای یک n ضلعی، برابر ۳۵ است. n را بیابید.

۵- تعداد قطرهای یک n ضلعی منتظم، ۳ برابر تعداد اضلاع آن است. هر زاویه داخلی این n ضلعی منتظم کدام است؟

۶- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (از جمله ضلع و قطر) در یک n ضلعی منتظم، چهار برابر تعداد اضلاع آن است. در این صورت هر زاویه خارجی این شکل را بیابید.

۷- مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی، سه برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است. تعداد قطرهای این شکل را بیابید.

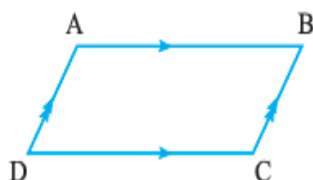
۸- اگر یک واحد به اضلاع یک n ضلعی اضافه شود، به تعداد قطرهای آن چند واحد اضافه می‌شود؟

چهارضلعی مهم

متوازی الاضلاع

تعریف متوازی الاضلاع، یک چهارضلعی است که اضلاع روبه روی آن دوجه دو با هم موازی اند.

$$ABCD \text{ متوازی الاضلاع} \Leftrightarrow AB \parallel CD, AD \parallel BC$$



قضیه در هر متوازی الاضلاع، دو ضلع مقابل با هم مساوی اند.

اثبات:

قضیه 2:

نشان دهید اگر ضلع های مقابل یک چهارضلعی دو به دو با هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه 3:

ثابت کنید هرگاه قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 4:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

اثبات:

قضیه 5:

ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 6:

نشان دهید در هر متوازی الاضلاع زوایای هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگرند.

اثبات:

قضیه 7:

نشان دهید اگر در هر چهارضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 1:

اگر در متوازی الاضلاع ABCD نیمساز دو زاویه ی مجاور دلخواه را رسم کنیم، زاویه ی حاصل بین این دو نیمساز کدام است؟

قضیه 8:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، زوایای رو به رو با هم برابرند.

اثبات:

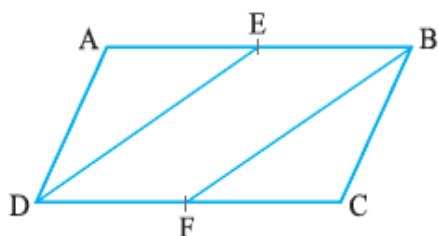
قضیه 9:

ثابت کنید اگر در هر چهارضلعی، زوایای رو به رو با هم برابر باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 2:

مطابق شکل، نقاط E و F به ترتیب وسط اضلاع AB و DC از متوازی الاضلاع ABCD هستند. ثابت کنید $DE = FB$.



سوال 3:

از محل برخورد دو قطر متوازی الاضلاع، خطی موازی دو ضلع روبه روی آن رسم می کنیم. ثابت کنید این خط از وسط دو ضلع دیگر می گذرد.

سوال 4:

می دانیم اگر در یک چهارضلعی، زاویه های روبه رو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است. حال به کمک این مطلب، ثابت کنید اگر

در یک چهارضلعی تمام زاویه های مجاور مکمل هم باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

مستطیل

نتیجه مهم می دانیم از بین دو خط موازی، اگر یکی بر خط سوم عمود باشد، دیگری هم عمود است پس در هر مستطیل تمام چهار زاویه قائمه اند.

در هر مستطیل، تمام خاصیت های متوازی الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱) در هر مستطیل قطر ها منصف یکدیگرند.

دقت کنید عکس این قضیه (حکم درست و کلی) برقرار نیست. یعنی اگر در یک چهارضلعی قطر ها منصف یکدیگر باشند، لزومی ندارد که این چهارضلعی مستطیل باشد. در حالی که فقط متوازی الاضلاع بودن آن قطعی است.

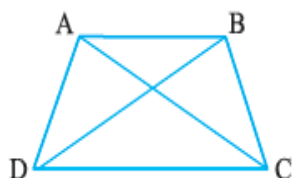
۲) در هر مستطیل زاویه های روبه رو برابر و زاویه های مجاور مکمل اند. (قطعاً با زاویه های 90° چنین مطلبی درست است) عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی از این که در یک چهارضلعی زاویه های روبه رو برابر یا زاویه های مجاور مکمل هم باشند نمی توان گفت این چهارضلعی مستطیل است (ولی حتماً متوازی الاضلاع هست).

۳) در هر مستطیل هر دو ضلع روبه رو برابرند.

عکس این قضیه هم برقرار نیست. فقط از این که در یک چهارضلعی هر دو ضلع روبه رو مساوی باشند، می توان نتیجه گرفت چهارضلعی متوازی الاضلاع است و به 90° بودن زاویه ها اصلاً ارتباط ندارد.

سوال 1:

ثابت کنید در هر مستطیل قطر ها برابرند.



دقت کنید عکس این مثال (قضیه) برقرار نیست. در شکل روبه‌رو قطرهای چهارضلعی ABCD مساوی هستند ولی این چهارضلعی مستطیل نیست.

سوال 2:

هر متوازی‌الاضلاع که در آن طول قطرها مساوی باشند، مستطیل است.

سوال 3:

ثابت کنید: الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

ب) اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلعی، نصف آن ضلع باشد، زاویه‌ی روبه‌روی آن ضلع، قائم‌الزاویه است.

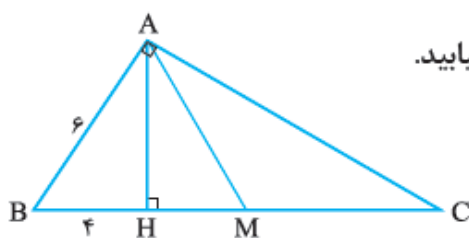
نتیجه مهم با رسم میانه‌ی نظیر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین به وجود می‌آید.

سوال 4:

یکی از زاویه‌های حاده در مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر 20° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را بیابید.

سوال 5:

مطابق شکل AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه است. طول AM را بیابید.



سوال 6:

ثابت کنید اگر در مثلث قائم الزاویه:

- الف) یکی از زاویه‌ها 30° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه نصف وتر است.
- ب) یکی از زاویه‌ها 60° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است.
- ج) یکی از زاویه‌ها 45° باشد، اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر وتر است.

سوال 7:

ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع با اضلاع نامساوی، یک مستطیل پدید می آید.

سوال 8:

ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع به وجود می آید اگر ابعاد این مستطیل a و b باشد طول ضلع

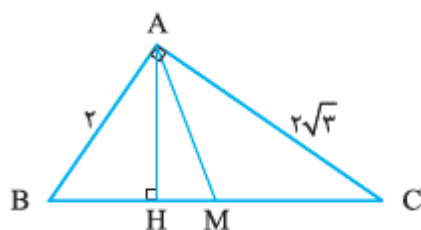
مربع حاصل را بر حسب a و b بیابید.

سوال 9:

در یک مثلث قائم الزاویه، طول دو ضلع قائم ۳ و ۴ است. طول میانه‌ی وارد بر وتر را بیابید.

سوال 10:

مطابق شکل $AB = 2$ و $AC = 2\sqrt{3}$. در این صورت اگر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، طول MH را بیابید.



سوال 11:

ثابت کنید اگر در یک مثلث قائم الزاویه، یکی از زاویه‌ها 15° (یا 75°) باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است.

سوال 12:

در مثلث قائم الزاویه ای، یکی از زاویه ها 30° است. ثابت کنید ارتفاع و میانه ی وارد بر وتر، زاویه ی قائمه ی مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنند.

سوال 13:

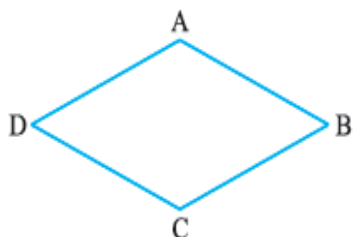
مستطیلی به محیط 20 و مساحت 9 مفروض است. نیمسازهای داخلی این مستطیل را رسم کرده ایم. محیط شکل حاصل را بیابید.

سوال 14:

نیمسازهای داخلی یک مستطیل را رسم کرده ایم و طول قطر مربع حاصل از رسم این نیمسازها 8 شده است. اگر طول مستطیل سه برابر

عرض آن باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

لوزی



تعریف لوزی، نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی باشد. می‌توان گفت هر چهارضلعی که دارای چهار ضلع مساوی باشد یک لوزی است، زیرا وقتی مطابق شکل $AB = BC = CD = AD$ باشد، خودبه‌خود اضلاع روبه‌رو، دوبه‌دو مساوی شده و یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که هر دو ضلع مجاورش مساوی‌اند؛ پس ABCD در نهایت یک لوزی می‌باشد.

در هر لوزی، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:



- ① در هر لوزی قطرها متصف یکدیگرند.
- دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی هر چهارضلعی که قطرهایش متصف یکدیگرند، لزومی ندارد لوزی باشد.
- ② در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.
- عکس این قضیه هم در حالت کلی برقرار نیست.
- ③ در هر لوزی اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.
- عکس این قضیه هم در حالت کلی درست نخواهد بود.

سوال 1:

ثابت کنید در هر لوزی:

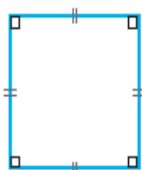
- الف) قطرها بر هم عمودند. ب) قطرها نیمساز زاویه‌های لوزی می‌باشند.

نتیجه قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر و همچنین نیمساز زاویه‌های آن می‌باشند.

سوال 2:

در یک لوزی به طول ضلع ۴، اندازه‌ی یک زاویه 120° است. قطر کوچک و بزرگ لوزی را بیابید.

مربع



تعریف مربع، نوعی مستطیل است که اضلاع مجاور آن مساوی‌اند. یا این‌که نوعی لوزی است که تمام زاویه‌هایش 90° است.

در هر مربع، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است، از جمله:

۱ در هر مربع قطرهای منصف یکدیگرند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.

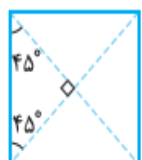
۲ در هر مربع زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند. (همه‌ی زاویه‌ها 90° هستند)

۳ در هر مربع اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.

چون مربع یک نوع مستطیل خاص است پس قطرهایش مساوی‌اند و چون یک نوع لوزی خاص است، پس قطرهایش

بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌های مربع نیز می‌باشند.

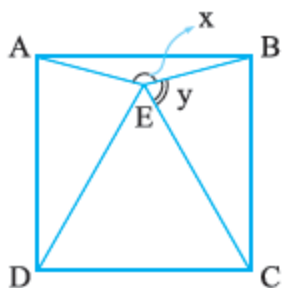
از برخورد نیمسازهای یک لوزی یا مربع (که همان قطرهای هستند) شکلی حاصل نمی‌شود (فقط یک نقطه درمی‌آید).



سوال 1:

مطابق شکل، چهارضلعی $ABCD$ مربع و مثلث DEC متساوی الاضلاع است.

مقادیر x و y را بیابید.

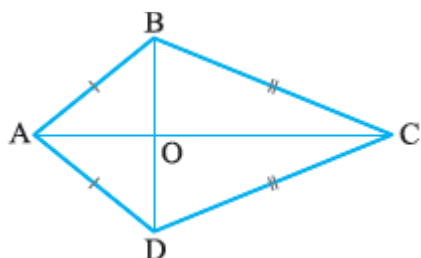


سوال 2:

در چهارضلعی $ABCD$ (که آن را شبه لوزی یا کایت می گوییم) اضلاع مجاور با هم مساوی اند. ثابت کنید:

الف) قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

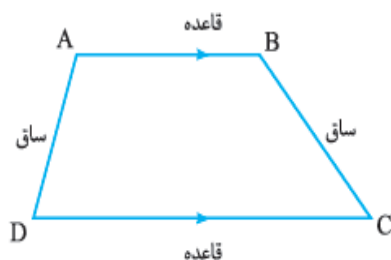
ب) قطرهای بر هم عمودند.



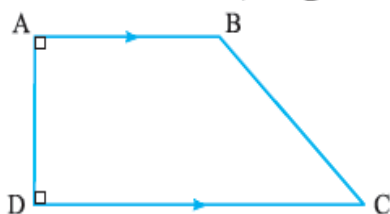
دوزنقه

تعریف دوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی باشند.

مطابق شکل، دوزنقه‌ی ABCD نمایش داده شده است. هریک از دو ضلع موازی با هم را قاعده و هر یک از دو ضلعی که با هم غیر موازی اند را ساق می‌گوییم. دو نوع دوزنقه‌ی خاص و بسیار مهم داریم که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

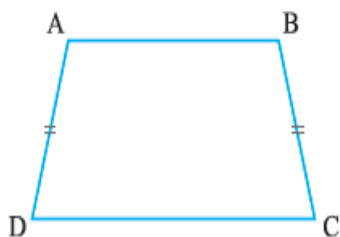


الف دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، اگر در یک دوزنقه، یکی از ساق‌ها بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌گوییم.



دقت کنید در شکل روبه‌رو یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه نشان داده شده است. چون قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس وقتی ساق AD بر قاعده‌ی AB عمود است بر پاره‌خط موازی آن یعنی قاعده‌ی DC هم عمود خواهد بود. در این حالت AD را ساق قائم و BC را ساق غیرقائم (مایل) دوزنقه می‌گوییم.

ب دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اگر در یک دوزنقه، طول ساق‌ها با یکدیگر مساوی باشد، دوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامیم.



سوال 1:

ثابت کنید در هر دوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند.

سوال 2:

ثابت کنید در هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به دو ساق هم‌اندازه‌اند.

سوال 3:

به کمک همنهشتی مثلث‌ها ثابت کنید پاره خطی که وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم بوده و طول

آن نصف ضلع سوم است.

سوال 4:

ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را به یکدیگر به صورت متوالی وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع

است. محیط این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

سوال 5:

مطابق شکل، ذوزنقهی ABCD متساوی الساقین است. از رئوس A و B بر قاعده‌ی بزرگ عمود

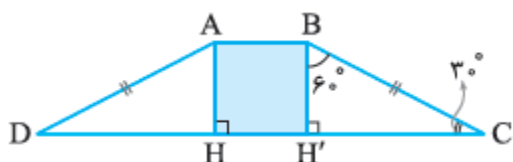


کرده‌ایم. ثابت کنید: $CH = DH' = \frac{DC - AB}{2}$

سوال 6:

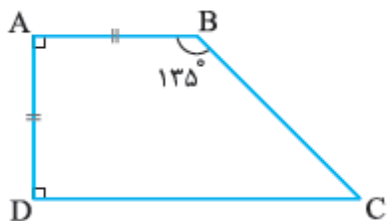
مطابق شکل، ABCD یک ذوزنقهی متساوی الساقین و چهارضلعی ABH'H یک مربع است.

اگر مساحت این مربع ۱۶ باشد، محیط ذوزنقه را بیابید.



سوال 7:

در ذوزنقهی روبه‌رو ثابت کنید طول قاعده‌ی بزرگ، دو برابر طول قاعده‌ی کوچک است.

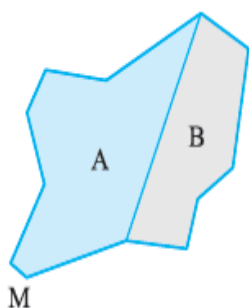


درس دوم

مساحت و کاربردهای آن

از این قسمت از درس، با بررسی اصول مهم مساحت، فرمول مساحت چندضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم. سپس برای هر کدام مسائل متنوعی طرح نموده و در نهایت مسئله‌ها را به صورت ترکیبی درمی‌آوریم.

اصول مهم مساحت در چندضلعی‌ها فرض می‌کنیم A ناحیه‌ی یک چندضلعی باشد. عدد مثبتی به نام مساحت به A نسبت داده و آن را با $S(A)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت موارد زیر برقرار است:



① $S(A) > 0$ ؛ به عبارت دیگر مساحت هر ناحیه در صفحه، عددی مثبت است.

② اگر اشتراک دو ناحیه‌ی چندضلعی فقط روی اضلاع یا رئوس آن‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشند مساحت اجتماع آن‌ها برابر است با مجموع مساحت‌های آن‌ها.

مثلاً در شکل روبه‌رو، ناحیه‌ی M به دو ناحیه‌ی A و B ، تفکیک شده است. در این صورت $S(M) = S(A) + S(B)$.

③ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت آن‌ها مساوی خواهد بود.

④ مساحت مستطیلی با طول a و عرض b (ابعاد a و b) عبارت است از $S = ab$.

نتیجه مساحت مربعی به ضلع a برابر است با a^2 .

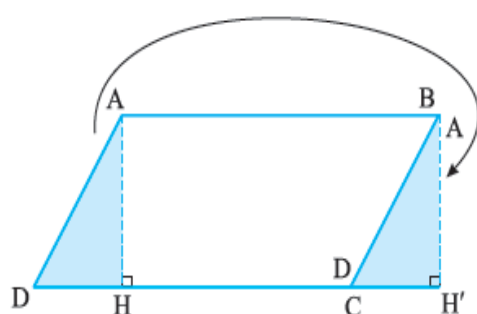
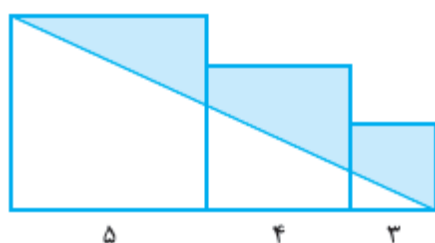
سوال 1:

به کمک فرمول مساحت مستطیل، ثابت کنید مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع قائم.

سوال 2:

در شکل روبه‌رو سه مربع به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ در کنار هم

واقع‌اند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



«مساحت متوازی‌الاضلاع برای این که مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را بیابیم، مطابق

شکل از رأس A، ارتفاع AH را بر DC وارد می‌کنیم. حال مثلث AHD را بریده و طوری به سمت راست متوازی‌الاضلاع منتقل می‌کنیم که ضلع AD، روی ضلع BC منطبق شود.

چهارضلعی ABH'A یک مستطیل است، زیرا متوازی‌الاضلاع است با یک زاویه 90° . بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD با مساحت مستطیل ABH'A یکسان است:

$$S_{ABH'A} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{طول} \\ \text{مستطیل}}}{AB} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{عرض} \\ \text{مستطیل}}}{AH} \xrightarrow{S_{ABCD} = S_{ABH'A}} S_{ABCD} = AB \times AH = CD \times AH$$

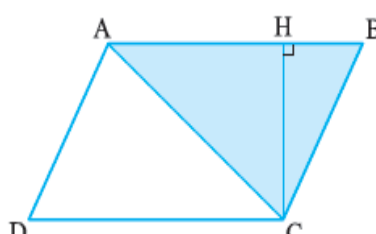
«به عبارت دیگر مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

سوال 3:

طول دو ضلع متوازی الاضلاعی ۲ و ۸ و ارتفاع نظیر ضلع بزرگتر برابر ۴ است. طول ارتفاع دیگر این متوازی الاضلاع را بیابید.

مساحت مثلث غیر مشخص برای محاسبه‌ی مساحت یک مثلث غیر مشخص، از فرمول مساحت متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم. مطابق

شکل یک قطر دلخواه از متوازی الاضلاع ABCD را رسم می‌نماییم. سپس از یکی از دو رأس این قطر عمودی بر ضلع مقابلش وارد می‌کنیم:



$$\triangle ABC, \triangle ADC: \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \\ AC = AC \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (1)}} S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABC} \rightarrow \boxed{S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC}} \quad (2)$$

از طرفی مساحت یک متوازی الاضلاع برابر است با ضرب ارتفاع در قاعده، یعنی $S_{ABCD} = AB \times CH$ پس طبق (۲) داریم: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH$

به عبارت دیگر مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده (هر کدام از اضلاع) در ارتفاع نظیرش. دقت کنید در هر مثلث

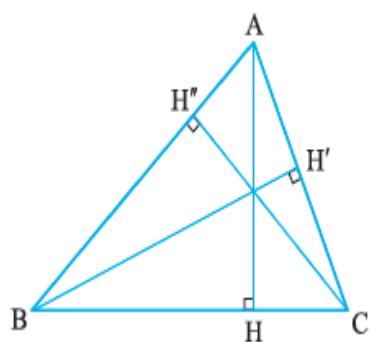
قائم الزاویه، اگر هر کدام از اضلاع قائم را قاعده بگیریم، ارتفاع نظیر آن، ضلع دیگر قائم است.

قرارداد، مطابق شکل، مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ مفروض است. در این صورت

اندازه‌ی ارتفاع AH نظیر ضلع $BC = a$ را با h_a نشان می‌دهیم:

به همین ترتیب اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AC = b$ را با h_b و اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AB = c$ را با h_c

نمایش خواهیم داد. در این صورت داریم:



$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c}$$

نتیجه بسیار مهم طبق فرمول مساحت مثلث، حاصل ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش، دو برابر مساحت مثلث است:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\Delta ABC}$$

در مثلث متساوی الساقین:

① ارتفاع وارد بر قاعده، طول قاعده را نصف می کند.

$$AB = AC, AH \perp BC \rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2}$$

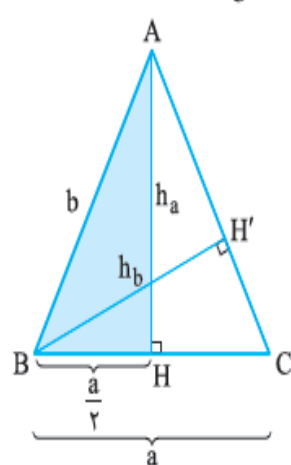
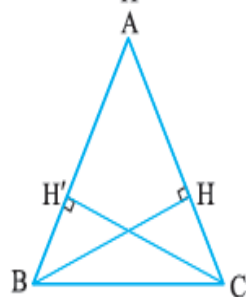
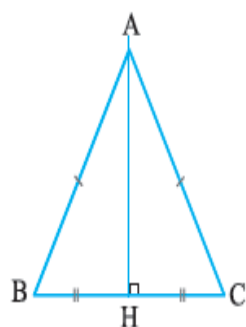
② طول ارتفاع وارد بر ساق ها، با یکدیگر برابرند.

$$AB = AC, BH \perp AC, CH' \perp AB \rightarrow CH' = BH$$

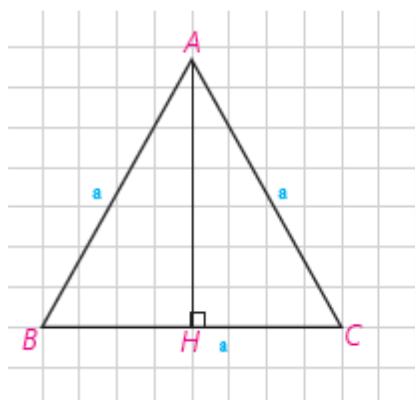
اگر قاعده ی مثلث متساوی الساقینی را a و ارتفاع وارد بر آن را h_a و همچنین ساق این مثلث را b و ارتفاع وارد بر ساق را h_b بگیریم، می توان نوشت:

$$\Delta ABH : b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2$$

$$\Delta ABC : ah_a = bh_b = 2S_{\Delta ABC}$$



سوال 4:

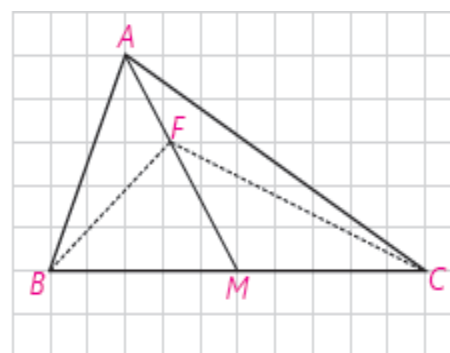


فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

به کمک قضیه فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

سوال 5:

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.
اگر F هر نقطه ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



سوال 6:

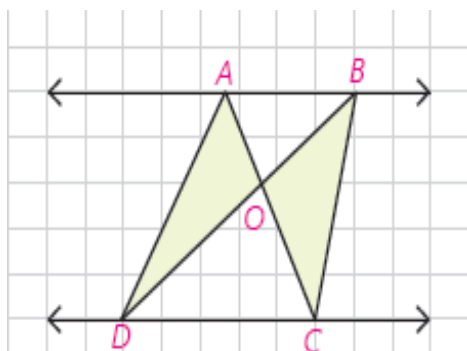
نشان دهید اگر وسط های سه ضلع مثلث را بهم متصل کنیم، چهار مثلث هم نهشت پدید می آید که مساحت های یکسانی دارند.

سوال 7:

نشان دهید سه میانه هر مثلث هم‌رسی در نقطه ای درون مثلث هم‌رسی اند. بطوریکه فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر

$\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله اش تا هر راس اندازه میانه نظیر آن راس است.

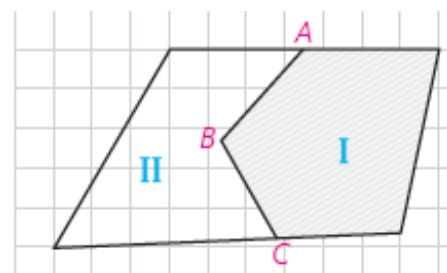
توجه:



ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

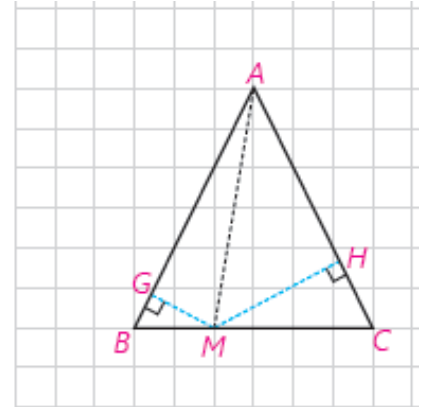
مسئله:

در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟



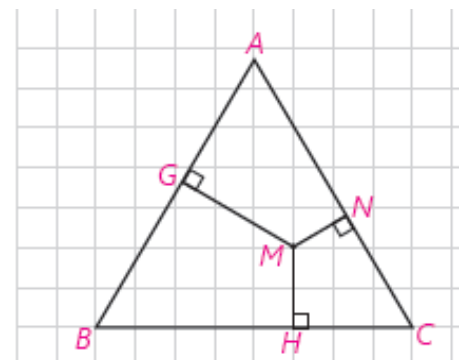
سوال 8:

در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطه دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AB و AC رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید. مساحت مثلث $\triangle ABC$ را نیز وقتی پاره خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



سوال 9:

نقطه دلخواه M را درون یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع به اندازه a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAB ، MBC ، MAC را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت $\triangle ABC$ چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



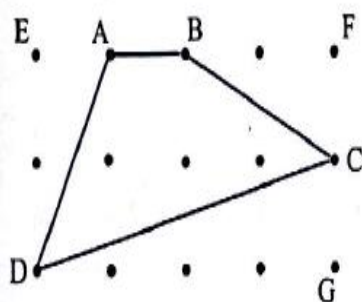
سوال 10:

اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله های نقطه M درون مثلث از سه ضلع، برابر $4, 2$ و 6 باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.

■ نقاط شبکه ای و مساحت

قضیه پیک (pick)

اگر یک شبکه از نقاط داشته باشیم به طوری که فاصله ی عمودی و افقی هر دو نقطه ی مجاور آن برابر یک واحد باشد، آن گاه مساحت چندضلعی که رأس های آن، نقاط این شبکه هستند به شرح زیر به دست می آید:



$$S = m + \frac{n}{2} - 1$$

مساحت چندضلعی:

m : تعداد نقاطی که داخل چندضلعی قرار دارند.

n : تعداد نقاطی که روی محیط چندضلعی قرار دارند.

به طور مثال برای شکل فوق داریم:

$$S = 3 + \frac{4}{2} - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

تمرینات:

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

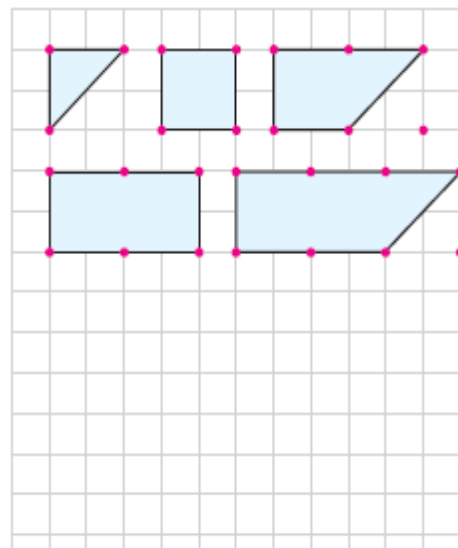
۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است،
یعنی $i = 0$ و تعداد نقاط مرزی، $b = 3, 4, 5, \dots$.

جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i = 0, b = 3, 4, 5, \dots$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$			



بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

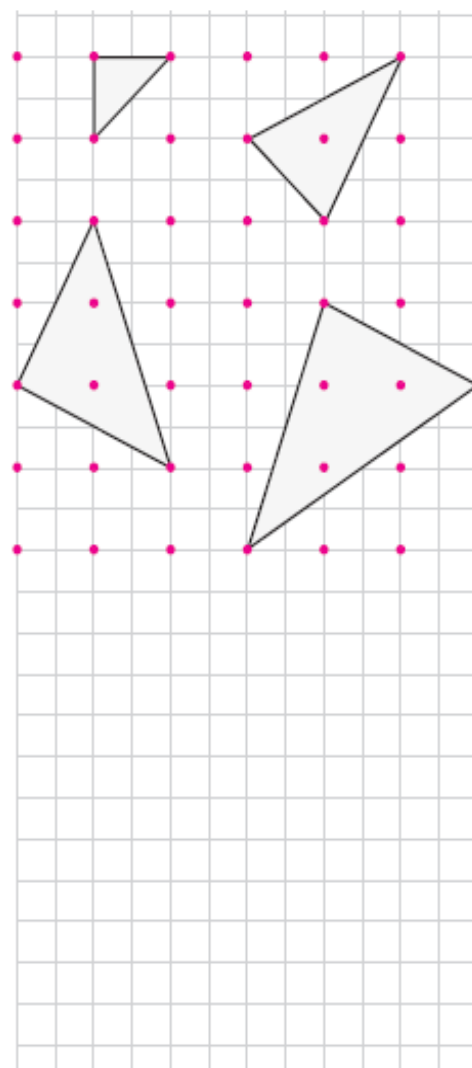
$$S = \frac{b}{2} - \dots + 0$$

۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b = 3$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S = \frac{b}{2} - 1 + 0$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید در نظر داشته باشید).

تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				

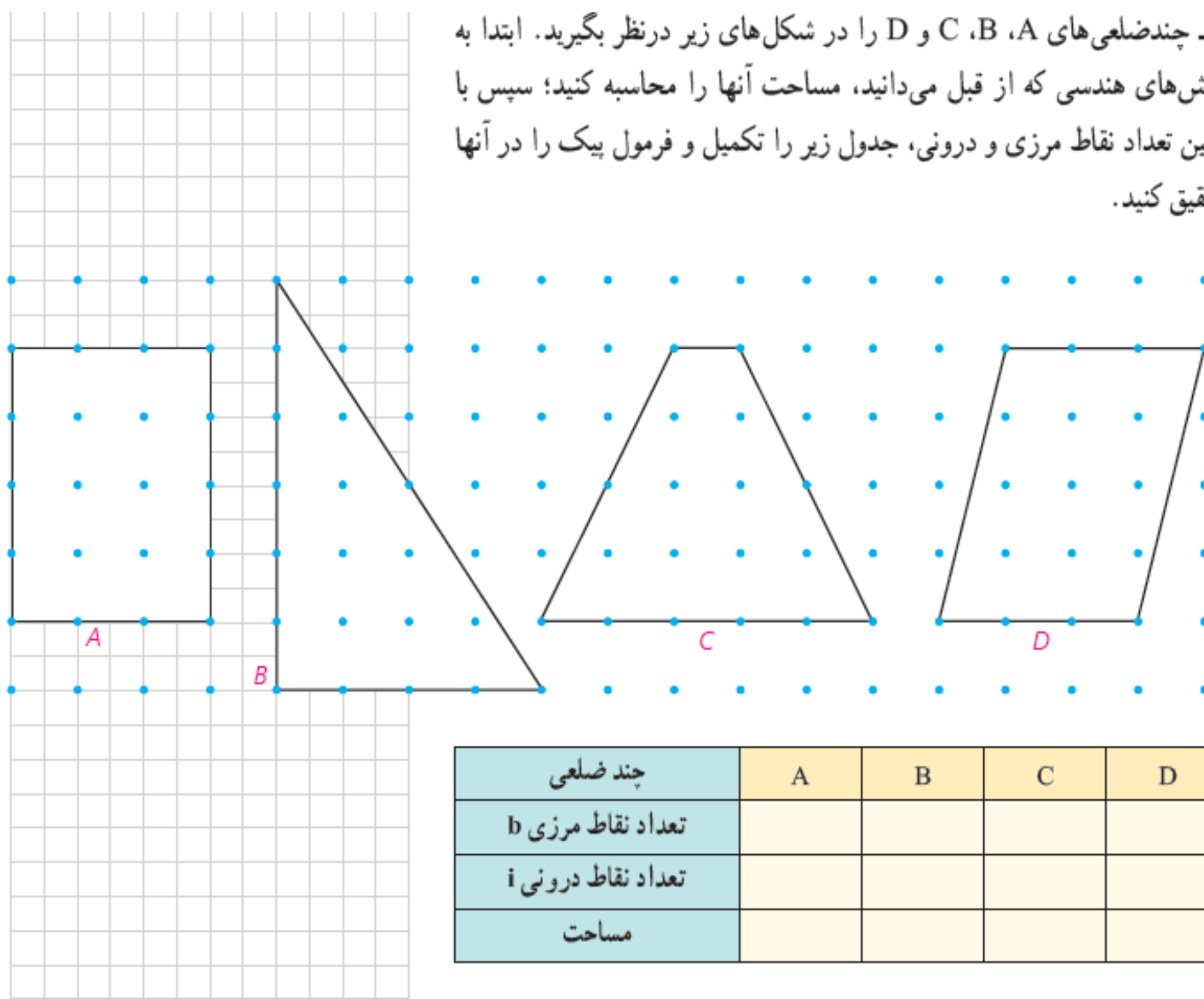
با تکمیل جدول بالا و مقایسه اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

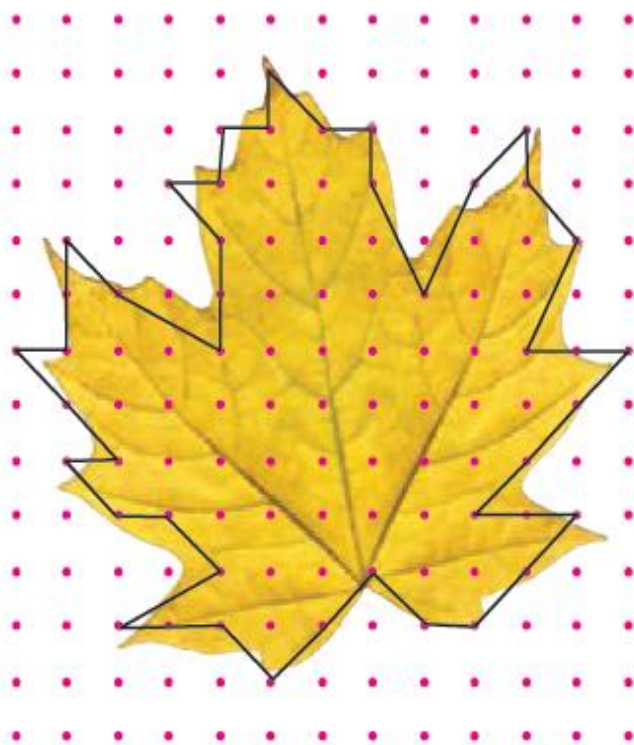


کاردکلاس

۱- چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



کاردکلاس

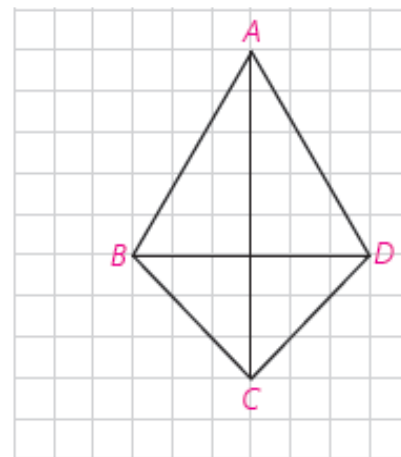


اگر فاصله نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به طور تقریبی محاسبه کنید. واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

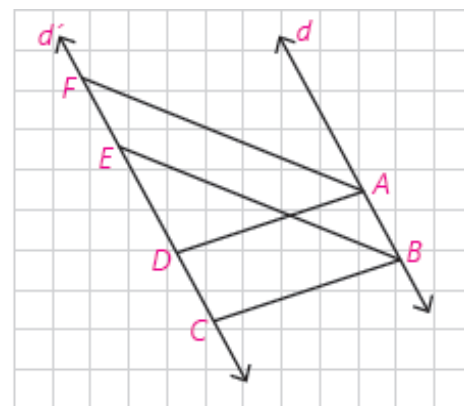


۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{3}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

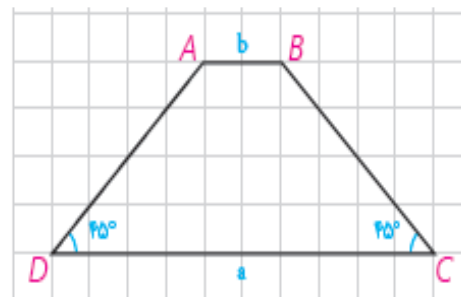
۲- در چهارضلعی $ABCD$ ، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.



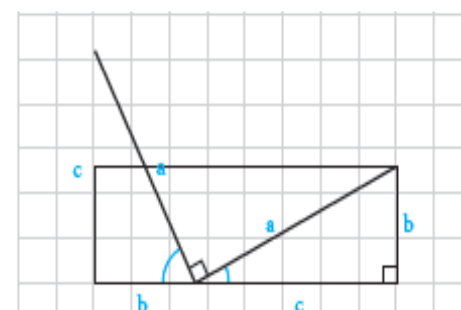
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟



۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

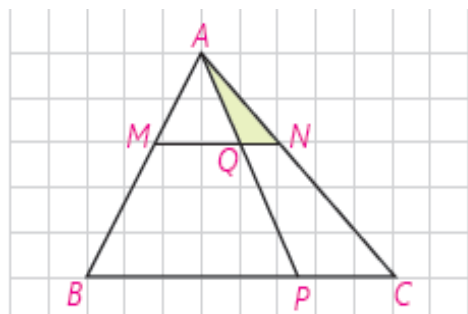
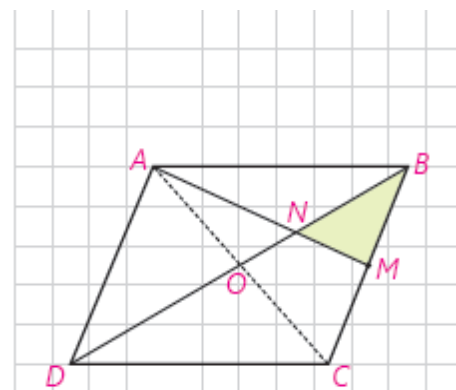


۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

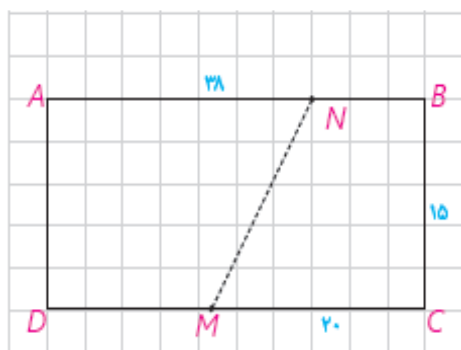


۶- در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



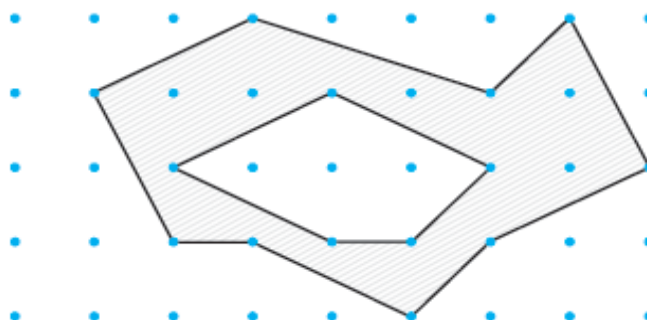
۷- در مثلث ABC، خط موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه قائمه است.

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی های شبکه ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



۱۱- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

یادداشت:

چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

- (1) تعداد نقاطی که از n نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست ، می گذرد برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.
- (2) مستطیل ، متوازی الاضلاعی است که حد اقل یکی از زاویه های آن قائمه باشد.
- (3) هر لوزی یک مربع است.
- (4) تمام مربع ها، متوازی الاضلاع هستند.
- (5) اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

2- گزینه درست را انتخاب کنید:

- (1) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب از سه برابر تعداد اضلاع، پنج واحد بیشتر است. مقدار n کدامست؟

الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11

- (2) اگر در یک چند ضلعی دو زاویه قائمه باشند ، آن چندضلعی:

الف) مربع است ب) مستطیل است ج) الف و ب د) به طورقطع مشخص نیست

- (3) در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوبرو موازیند، در این صورت آن چهارضلعی

الف) متوازی الاضلاع است ب) مربع است ج) مستطیل است د) لوزی است

- (4) دو قطر یک چهارضلعی برابرند، در این صورت این چهارضلعی

الف) متوازی الاضلاع است ب) مستطیل است ج) دوزنقه متساوی الساقین است د) نامشخص است

- (5) در یک n ضلعی محدب، تعداد اضلاع و قرها روی هم 66 است. از هر رده چند قطر می گذرد؟

الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11

- (6) وسط های اضلاع یک چهارضلعی محدب را متوالیا به هم وصل کرده ایم تا یک چهار ضلعی جدیدی به دست آید. از تقاطع نیمساز های داخلی

این چهار ضلعی جدید کدام شکل پدید می آید؟

الف) مربع ب) مستطیل ج) متوازی الاضلاع د) لوزی

- (7) طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است. نیمسازهای زوایای مستطیل را رسم می کنیم، محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده در

درون آن است؟

الف) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ج) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ د) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3- جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

- (1) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با.....

- (2) در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه وتر برابر است با
- (3) در هر لوزی، قطرهای یکدیگرند و روی زاویه ها می باشند.
- (4) در متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگرند و لزوماً با هم نیستند.
- (5) مربع، چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن و یک زاویه قائمه دارد.
- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع بوجود می آید. اگر ابعاد مستطیل 5 و 10 باشد، محیط مربع حاصل برابر است با
- (6) در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه 30° وتر است و ضلع روبرو به زاویه 45° وتر است و ضلع روبرو به زاویه 60° وتر است.

4- اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

- (1) چندضلعی
 - (2) قطر چند ضلعی
 - (3) چندضلعی محدب
 - (4) دوزنقه
- 5- ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.
- 6- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، دو زاویه مجاور، مکملند.
- 7- ثابت کنید چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و برابر باشند، متوازی الاضلاع است.
- 8- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.
- 9- ثابت کنید اگر در یک دوزنقه، دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند، آن دوزنقه متساوی الساقین است.
- 10- ثابت کنید در هر لوزی، قطرهای عمود منصف یکدیگرند و روی نیمساز زاویه ها می باشند.
- 11- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع، یک مستطیل پدید می آید.
- 12- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می آید.
- 13- نشان دهید اگر در مثلث قائم الزاویه ای یک زاویه 15° باشد، در این صورت ارتفاع وارد بر وتر برابر است با ربع وتر.
- 14- نشان دهید اگر از به هم وصل کردن متوالی اوساط یک چهارضلعی دلخواه، یک متوازی الاضلاع به دست می آید.

مساحت و کاربردهای آن

- 15- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

(1) اگر دو قطر یک دوزنقه قائم الزاویه بر هم عمود باشند، ارتفاع واسطه ی هندسی بین دو قطعه است.

(2) اندازه دو ضلع قائمه از مثلث قائم الزاویه ای 8 و $2\sqrt{11}$ است. فاصله ی نقطه ی تلاقی میانه ها از وسط وتر این مثلث $\frac{1}{3}$ وتر است

16- گزینه درست را انتخاب کنید:

(1) در یک لوزی اندازه هر ضلع 10 و نسبت اندازه های دو قطر 3 به 4 است. مساحت لوزی کدام است؟

الف) 96 (ب) 108 (ج) 24 (د) 48

(2) در یک کایت اندازه ی اضلاع 17 و 10 و قطر بزرگ 21 است. مساحت کایت کدام است؟

الف) 154 (ب) 172 (ج) 168 (د) 196

(3) یک متوازی الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم الزاویه مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت یک مربع و یک مثلث قائم الزاویه 64 و 24 باشد، محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

الف) 32 (ب) 36 (ج) 48 (د) 54

(4) در مثلث قائم الزاویه ای نسبت دو قاعده $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده ی کوچک را به وسط ساق قائم وصل کنیم، مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت دوزنقه ی اصلی است؟

الف) $\frac{1}{10}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{6}$

(5) در یک دوزنقه ی متساوی الساقین اندازه ی دو قاعده 5 و 9 و طول ساق 6 واحد است. مساحت این دوزنقه کدام است؟

الف) $14\sqrt{6}$ (ب) $21\sqrt{2}$ (ج) $21\sqrt{3}$ (د) $28\sqrt{2}$

17- جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

(1) در هر چهار ضلعی که قطر ها بر هم عمود باشند، مساحت برابر است با

(2) اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث به دست می آید که دارای برابر می باشند.

(3) سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

(4) در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده برابر است با

(5) در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با

(6) مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با

(7) یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با برابر تقسیم می کند.

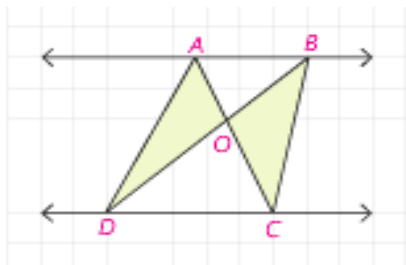
18- نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.

19- نشان دهید اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت به دست می آید که دارای مساحت های برابر می باشند.

20- نشان دهید سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث هم‌رسند، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

21- با رسم سه میانه مثلث، نشان دهید سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

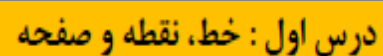
22- فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند به طوریکه دو خط AC و BD در نقطه ای مانند O متقاطع باشند. نشان دهید مساحت های دو مثلث AOD و BOC برابرند.



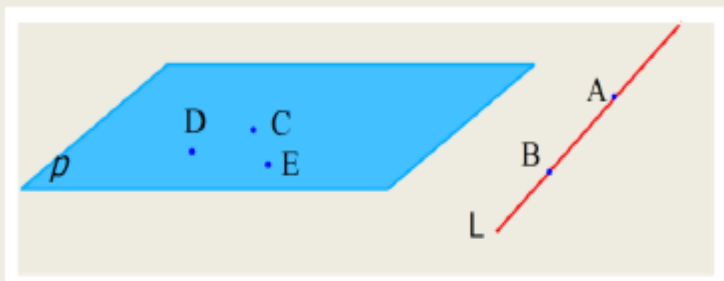
23- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.

24- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

25- نشان دهید مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.



نقطه خط و صفحه از مفاهیم مهم هندسی هستند که معمولاً به صورت زیر نمایش داده می شوند.



خط AB یا BA و یا خط L

صفحه DCE یا CDE یا ... و یا صفحه P

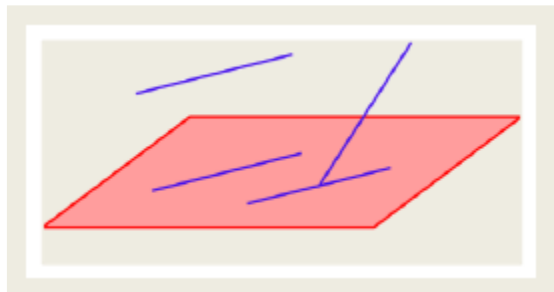
توجه: خط صفحه نامحدودند و ضخامتی هم ندارند.

اوضاع نسبی دو خط در صفحه

۱. موازی منطبق: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو خط در یک نقطه مشترکند. این نقطه را نقطه ی تقاطع دو خط می نامند.

حالت های مختلف دو خط در فضا:

۱. موازی منطبق: دو خط در حقیقت یک خط می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو خط هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.
۳. متقاطع: دو خط در یک نقطه مشترکند و می توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.
۴. متنافر: دو خط هیچ نقطه ی مشترکی ندارند و نمی توان آن ها را در یک صفحه قرار داد.



فعالیت: در شکل بالا خطوط را نام گذاری کنید و برای هر حالت دو خط در فضا مثالی از این خطوط بزنید.

توجه:

در این فصل دانستن اصول زیر ضروری می باشد.

- اصل ۱: از هر دو نقطه ی متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می گذرد. یعنی اولاً یک خط در فضا وجود دارد که از دو نقطه ی متمایز در فضا می گذرد؛ ثانیاً این خط یکتاست، یعنی اگر دو خط از دو نقطه ی مشخص در فضا بگذرند حتماً بر هم منطبقند.
- اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می گذرد.
- اصل ۳: در هر صفحه حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.
- اصل ۴: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.
- اصل ۵: اگر دو نقطه ی متمایز از خطی در یک صفحه باشد، آن خط به تمامی درون صفحه قرار می گیرد.
- خط و صفحه از هر طرف نامحدود می باشند؛ بنابراین نمی توان تمام آن ها را در یک شکل نمایش داد.
- اصل ۶: اگر دو صفحه ی متمایز در یک نقطه مشترک باشند، آنگاه در یک خط مشترک خواهند بود.
- اصل توازی اقلیدس در صفحه: از هر نقطه خارج یک خط در صفحه یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.
- اصل ۷ (اصل توازی اقلیدس در فضا): از هر نقطه خارج یک خط در فضا یک و فقط یک خط به موازات آن خط می گذرد.

سوال:

در صفحه از هر نقطه چند خط می گذرد؟ در فضا چطور؟

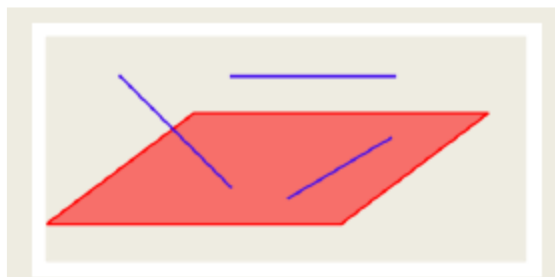
در صفحه از یک نقطه خارج خط چند خط موازی آن می توان رسم کرد؟ در فضا چطور؟

آیا در فضا هم دو خط موازی با یک خط خود با هم موازی هستند؟

آیا در فضا هم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند؟

حالت های مختلف خط و صفحه در فضا:

۱. موازی منطبق: در این حالت خط کاملاً درون صفحه قرار می گیرد.
۲. موازی غیرمنطبق: در این حالت خط و صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: در این حالت خط و صفحه در یک نقطه با هم اشتراک دارند؛ این نقطه را نقطه ی تقاطع خط و صفحه می نامند.



سوال:

از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد ؟

از دو خط متقاطع در فضا چند صفحه می گذرد ؟ از دو خط موازی چطور ؟

از یک نقطه خارج صفحه چند خط موازی آن صفحه می توان رسم کرد ؟

دو خط L و d در فضا با هم موازیند .

اگر صفحه ای موازی یک از آنها باشد آیا الزاماً با دیگری موازی است ؟

اگر صفحه شامل یکی از آنها باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

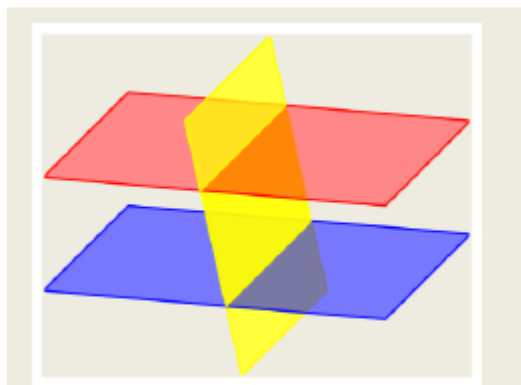
اگر صفحه با یکی از آنها متقاطع باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

حالات نسبی دو صفحه

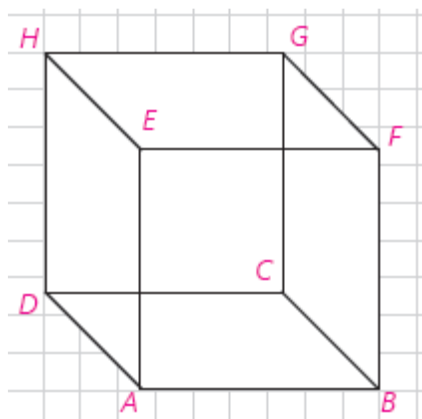
۱. موازی منطبق: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.

حالت های مختلف دو صفحه در فضا :

۱. موازی منطبق: دو صفحه در حقیقت یک صفحه می باشند.
۲. موازی غیر منطبق: دو صفحه هیچ نقطه ی اشتراکی ندارند.
۳. متقاطع: دو صفحه در یک خط مشترک می باشند؛ این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.



سوال:



به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چگونه؟

EF و GC چگونه؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

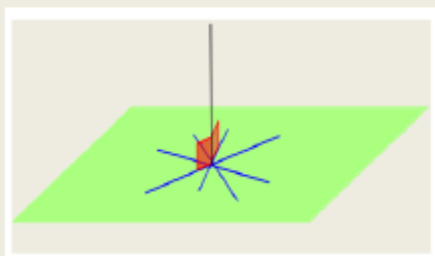
بر کدام منطبق است؟

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.

تعامد خط و صفحه:

اگر خطی در یک نقطه صفحه را قطع کند بر آن صفحه عمود است، هرگاه بر تمام خطوط آن صفحه که از این

نقطه می گذرند عمود باشد.

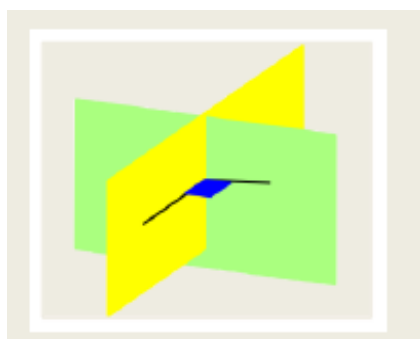


می توان نشان داد اگر این خط فقط بر دو خط متقاطع از صفحه

عمود باشد، بر صفحه عمود است.

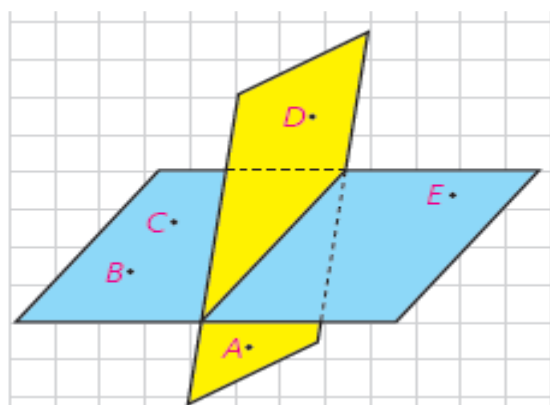
تعامد دو صفحه:

دو صفحه بر هم عمودند هرگاه هر یک شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

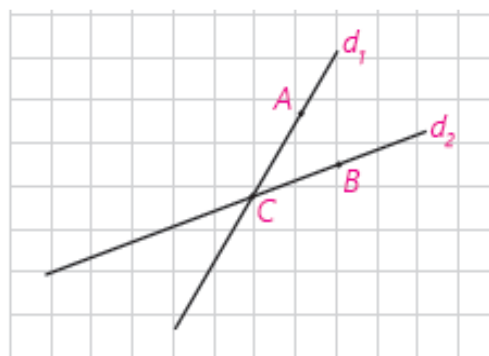


سوال

- می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.
- (الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟
- (ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟
- (ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟
- (د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟
- (هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.



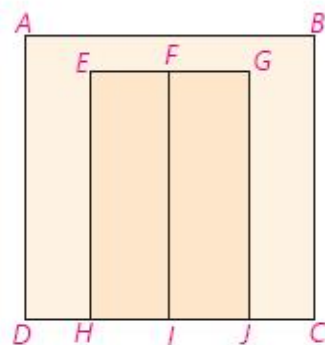
- ۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :
- (الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.
- (ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.
- (ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
- (د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



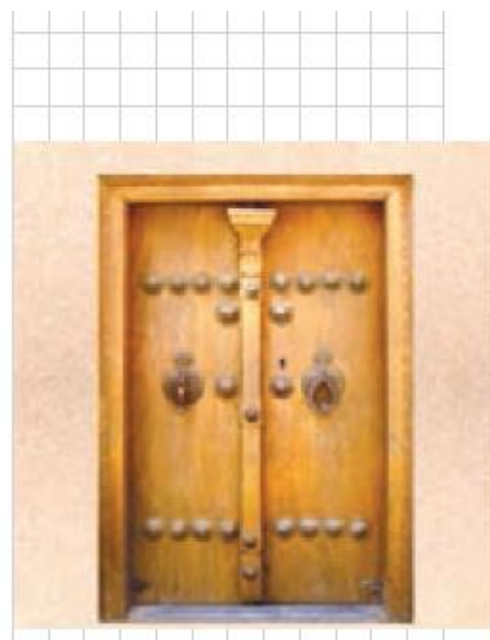
- ۲- خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل اند. صفحه P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.
- (الف) صفحه P شامل نقطه C است.
- (ب) صفحه P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.
- (ج) صفحه P شامل نقاط C و B و A است.
- (د) صفحه P شامل خط d_1 و نقطه B است.

- ۳- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).
- (الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.
- (ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.

- ۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.
- (الف) وضعیت صفحات EFGH و ABCD و EFGH را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.



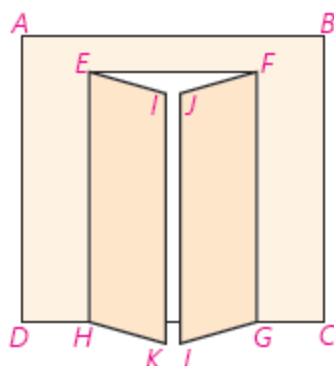
- (ب) خطوط BC و FI
- (ج) خطوط AB و FI
- (د) خطوط EF و FG
- (ه) خطوط HI و FG
- (و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)





۵- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های

زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های ABCD و EIKH و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط BC و FJ

۷- منشور سه پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید.

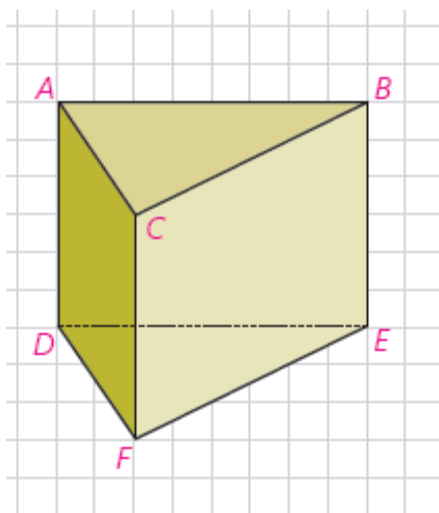
ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط هم‌رس نام ببرید.

ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید.



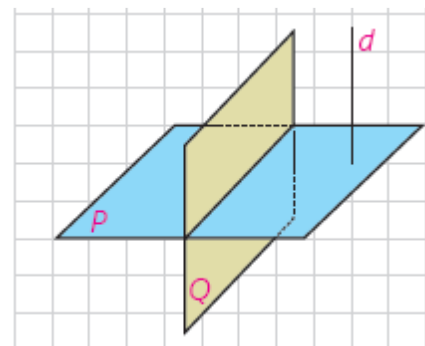
۸- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می توان به آن صفحه عمود کرد؟

۹- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

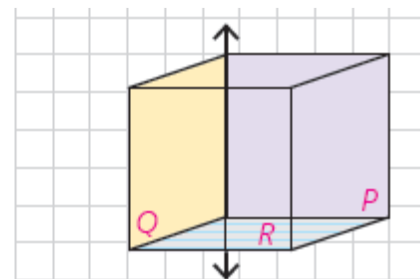
الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

۱۰- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟



۱۱- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟



درس دوم

تفکر تجسمی

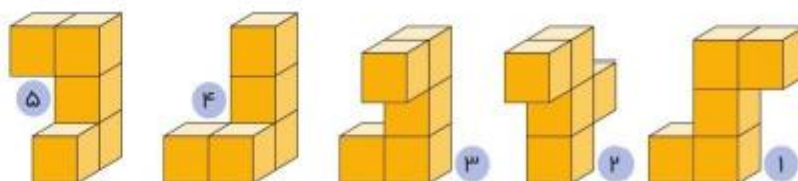
در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند درباره موضوع مورد نظر فکر کنیم.

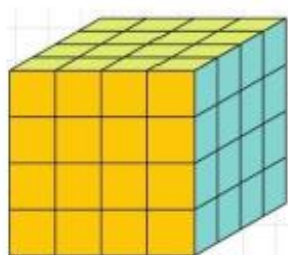
در این درس هدف تجسم اجسام و اشکال است. به همین دلیل ما فقط سعی داریم با مثال‌های متعدد در این زمینه به تبحر کافی برسیم.

(۱) شکل زیر کدام شکل هندسی است که از بالا به آن نگاه شده؟



(۲) کدام گزینه شکل سمت چپ را کامل می‌کند؟





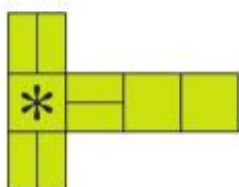
۳) در مکعب مقابل که تمام وجه های آن رنگ شده است .

الف) چند مکعب رنگ شده داریم ؟

ب) چند مکعب فقط دو وجه رنگ شده دارد ؟

ج) چند مکعب فقط ۳ وجه رنگ شده دارد ؟

۴) در هر مورد مکعب گسترده سمت چپ مربوط به کدام گزینه است ؟



۳)



۲)



۱)



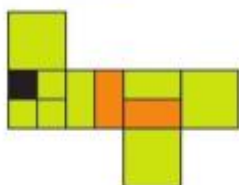
۳)



۲)



۱)



۳)

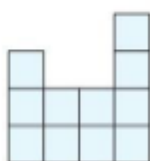
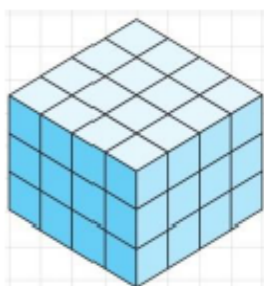


۲)



۱)

۵) در شکل مقابل حداقل و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به صورت زیر شود .

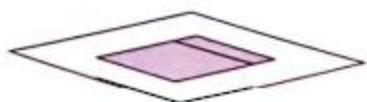


سوال: چه چیزی باعث این خطای دید شده است؟

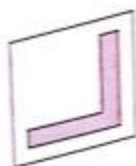
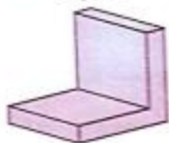


نتیجه: با توجه به نمای دید ما اجسام دارای شکل های مختلفی خواهند بود.

نمای بالا



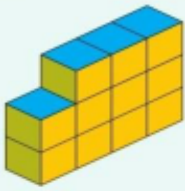
نمای چپ



نمای روبرو

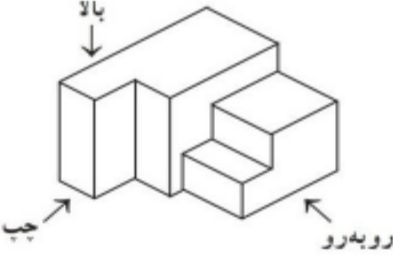
یادداشت

۶) نماهای هر شکل را در مقابل آن درون جدول رسم کنید.

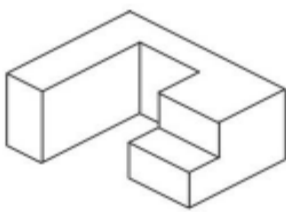
نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ
		
		
		

۷) سه نمای روبه‌رو و راست و چپ اجسام زیر رسم شده اند. مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام تما است.

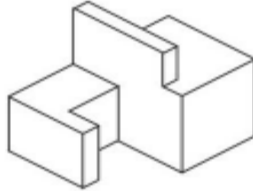
(الف)



(ب)



(ج)

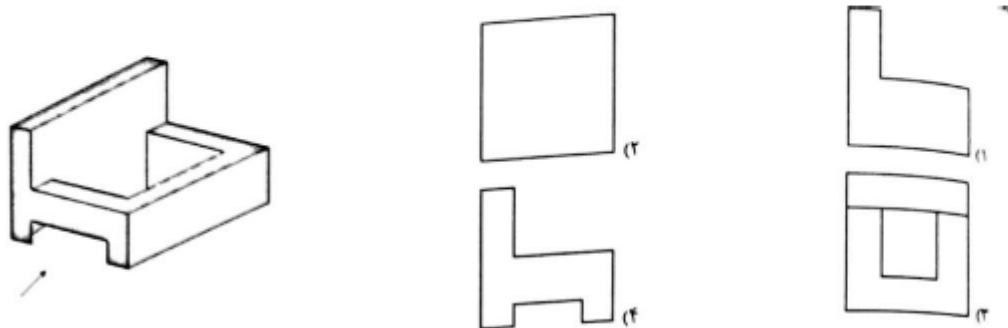


Below each 3D shape are three sets of 2D orthographic projections (front, top, and side views) for identification:

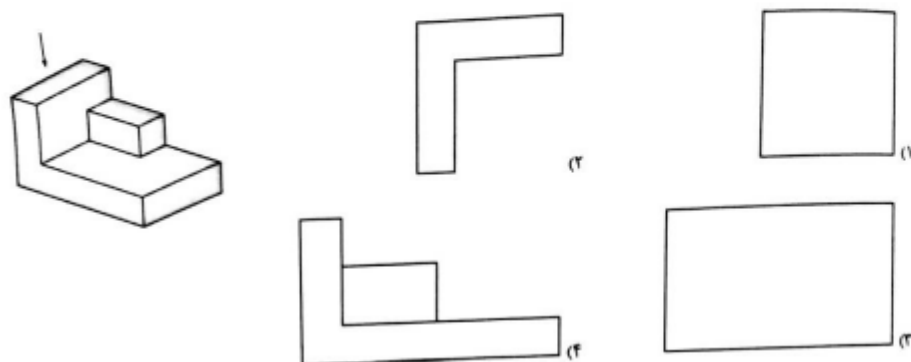
- Set 1 (for (a)): Front view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on top; Top view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on the right; Side view is a 3x2 rectangle.
- Set 2 (for (b)): Front view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on top; Top view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on the left; Side view is a 3x2 rectangle.
- Set 3 (for (c)): Front view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on top; Top view is a 3x2 rectangle with a 1x2 rectangle on the right; Side view is a 3x2 rectangle.

تمرین :

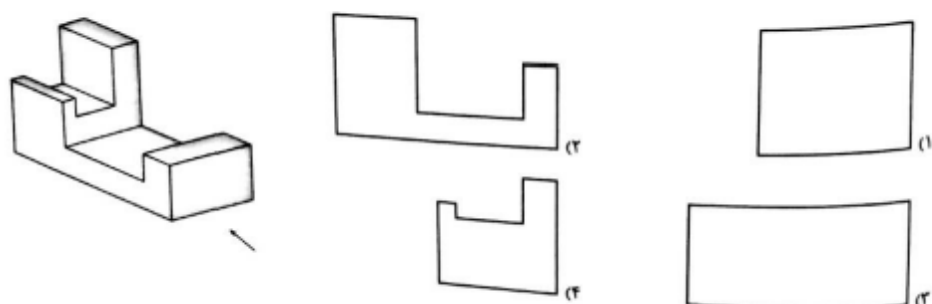
(۱) نمای چپ شکل مقابل کدام است ؟



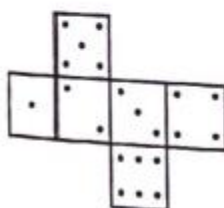
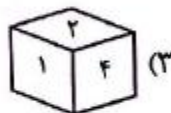
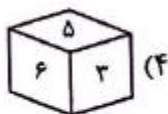
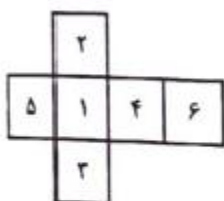
(۲) نمای بالای شکل مقابل کدام است ؟



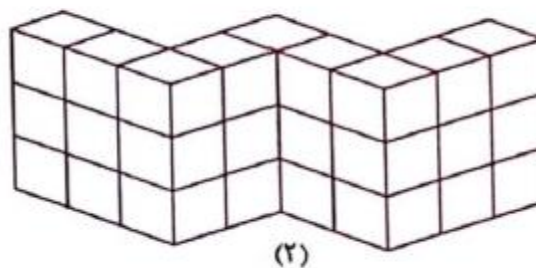
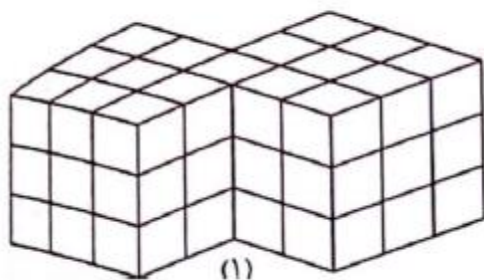
(۳) نمای روبروی شکل مقابل کدام است ؟



۴) کدام مکعب مربوط به گسترده مقابل است؟



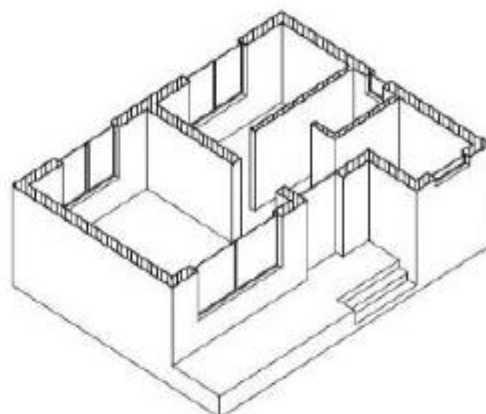
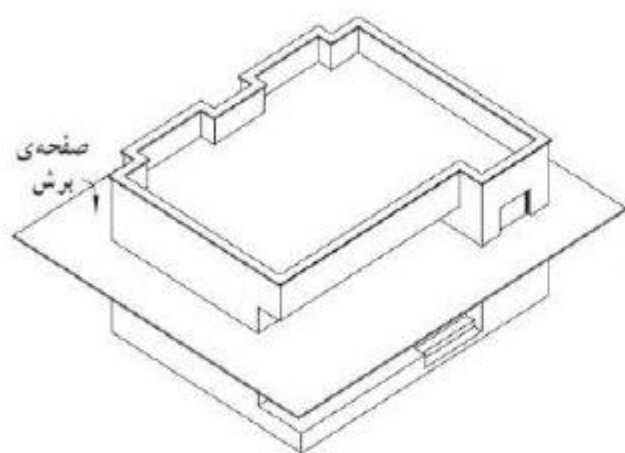
۵) چند مکعب کوچک از شکل (۱) برداشته شود تا شکل (۲) بدست بیاید؟



درس سوم: برش

برش یک علم بسیار کاربردی در علوم مکانیک، معماری، پزشکی، زمین شناسی و است.

به کمک برش های مختلف می توان درک درست تری از اجسام به دست آورد به عنوان مثال به شکل های زیر که مربوط به علوم مختلف هستند نگاه کنید.



سطح مقطع: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک شکل هندسی حاصل می شود را سطح مقطع می نامند.

سوال: اگر صفحه ای به صورت افقی، عمودی یا مایل بر یک کنده برش ایجاد کند. سطح مقطع های ایجاد شده چه شکل هایی خواهند بود؟



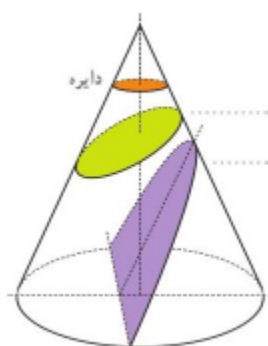
.....



بیضی



.....



سوال : یک صفحه به صورت های زیر با یک مخروط برخورد می کند . سطح مقطع حاصل چه شکلی است ؟

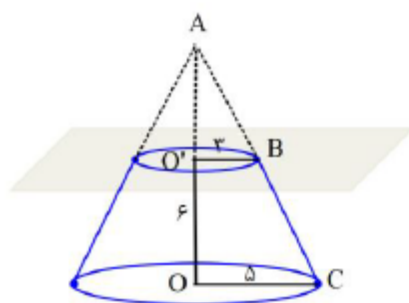
الف) افقی : سطح مقطع است .

ب) مایل به طوری که قاعده را قطع نکند : سطح مقطع است .

ج) مایل به طوری که موازی یال باشد : سطح مقطع است .

سوال : اگر صفحه ای عمودی این دو استوانه را قطع کند چه سطح مقطعی حاصل می شود ؟

سوال : صفحه ای افقی یک مخروط را قطع و یک مخروط ناقص درست کرده است . حجم این مخروط ناقص را بیابید .

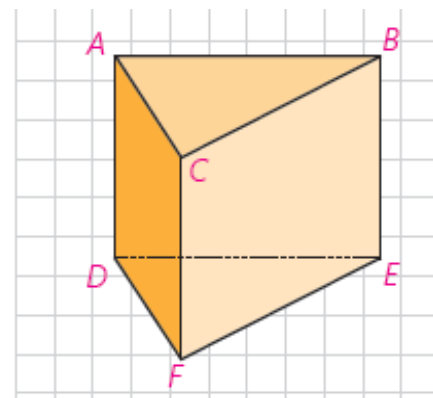


سوال : صفحه ای به فاصله h از مرکز کره آن را قطع کرده است . مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

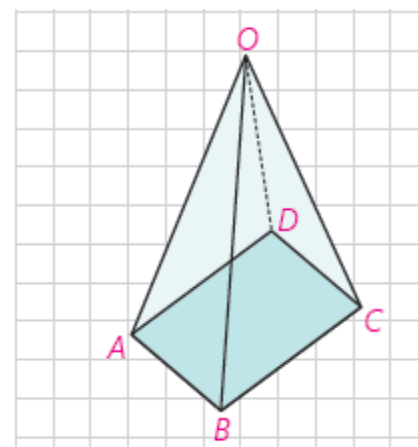
سوال : دو دایره با هم برخورد کرده اند . اگر تمام نقاط مشترک آنها را به مرکز یکی از آنها وصل کنیم چه شکلی حاصل می شود ؟



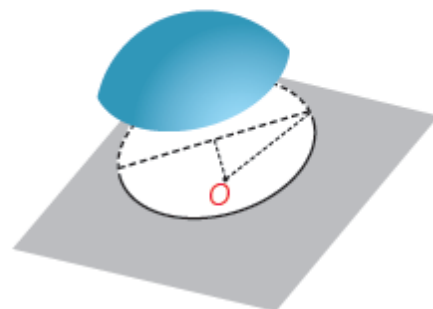
۱- فرض کنید منشور زیر، یک قطعه چوبی توپر باشد. این قطعه چوبی را طوری اهره می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟
 الف) P و N, M وسط پاره‌های BE ، CF و AD
 ب) D, C و E
 ج) C, F و Q (وسط پاره خط AB)



۲- قاعده هرمی، مستطیل $ABCD$ است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.
 الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد.
 ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد.
 ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد.



۳- صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

دوران حول محور

از دوران دادن شکل‌های هندسی دو بعدی می‌توان جسم‌های سه بعدی مختلفی را تجسم کرد.
مثلاً از دوران پاره خط عمود بر یک خط حول آن یک دایره بدست می‌آید.

مثلاً از دوران نیم دایره حول قطر خوش، کره بوجود می‌آید.

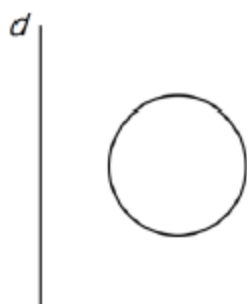
سوال: از دوران یک مستطیل ۲ در ۴ حول طول و عرض آن چه شکل‌هایی ایجاد می‌شود؟

سوال: اگر دو خط متقاطع باشند و یکی حول دیگری دوران کند چه شکلی حاصل می‌شود؟

سوال: از دوران مثلث متساوی الساقین حول قاعده چه شکلی پدید می آید؟

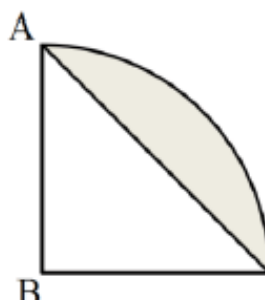
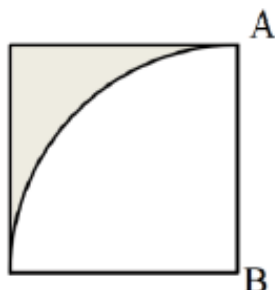
سوال: از دوران ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها چه شکلی پدید می آید؟

سوال: از دوران دایره حول خط d چه شکلی حاصل می شود؟

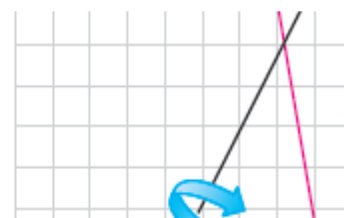


سوال: حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائمه ۳ و ۴ حول ضلع قائمه کوچکتر را بیابید.

سوال : حجم حاصل از دوران قسمت رنگی هر شکل حول AB چقدر است ؟



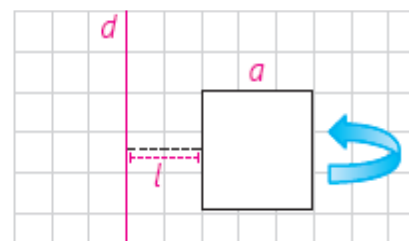
۱- دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟



۲- در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

- الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن :
- ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه :
- پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها :
- ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن :

۳- مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



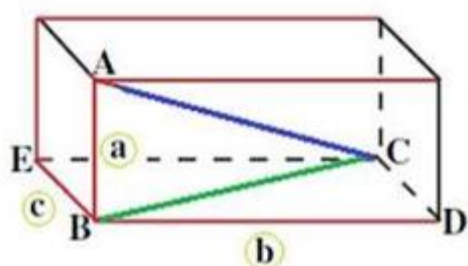
۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.



مطالب اضافی:

فرمولهای مهم فصل چهارم:

روش یافتن طول قطر مکعب مستطیل:



فرض کنید طول یال های AB ، BD و BE به ترتیب a ، b و c باشد. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم الزاویه و AC وتر آن است.

از طرف دیگر، مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است.

$$\text{طول وتر } ABC = \text{طول قطر } AC$$

با دو بار استفاده از رابطه ی فیثاغورس می توانیم بنویسیم:

و



$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

تعریف مکعب: مکعب مستطیلی که طول یال های آن با هم برابر باشند.

توجه: اگر طول یال های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن برابر است با: $a\sqrt{3}$

حجم مکعب مستطیل:

با داشتن طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل، می توان نوشت:

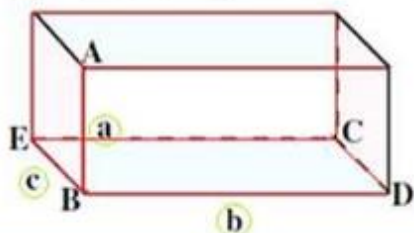
$$\text{حجم مکعب مستطیل} =$$

مساحت کل مکعب مستطیل:

مجموع مساحت های همه ی وجه های مکعب مستطیل را مساحت کل آن می گویند.

با توجه به اینکه در مکعب مستطیل، وجه های روبه رو همنهشت هستند، پس اگر طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب a ، b و c باشند، می توان مساحت کل آن را بصورت

زیر نوشت:



مساحت کل



توجه: در رابطه ی بالا، اگر به جای b و c مقدار a را قرار دهیم، مساحت کل مکعب به طول یال a بدست می آید.

$$S = 2(aa + aa + aa) = 2(3a^2) = 6a^2$$

اندازه حجم مکعب: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، در نتیجه با استفاده از رابطه ی حجم مکعب مستطیل حجم مکعبی به طول یال a برابر است با:

حجم مکعب

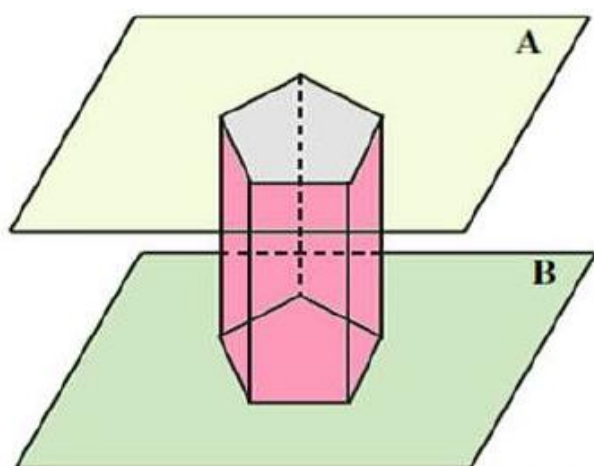
مساله: طول قطر یک مکعب برابر است با $\sqrt{75}$ ، حجم و مساحت کل این مکعب را بدست آورید.

= قطر مکعب

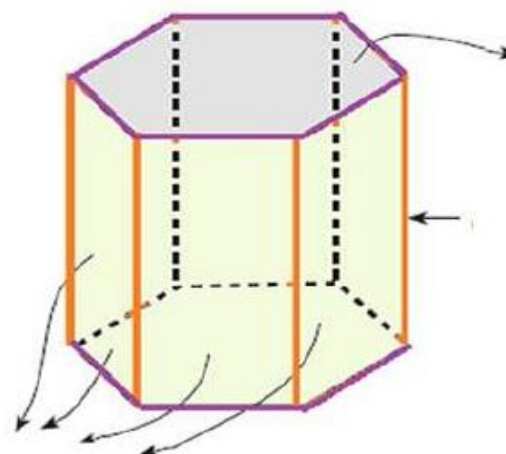
: حجم مکعب

: مساحت کل

تمرین: اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{12}$ باشد مساحت کل و حجم آنرا حساب کنید.



منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی الاضلاع باشند.



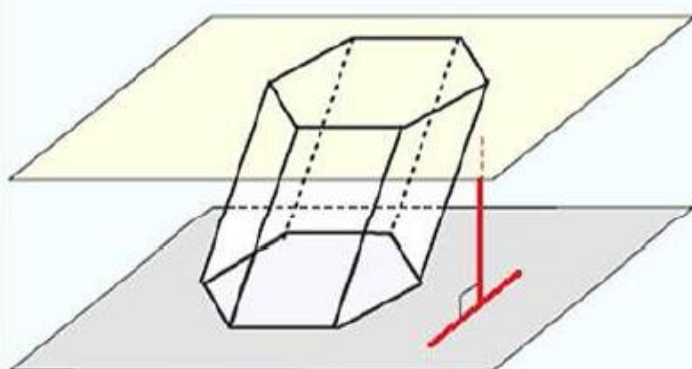
دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی الاضلاع هستند، و یال‌های محل تلاقی وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند

ارتفاع منشور

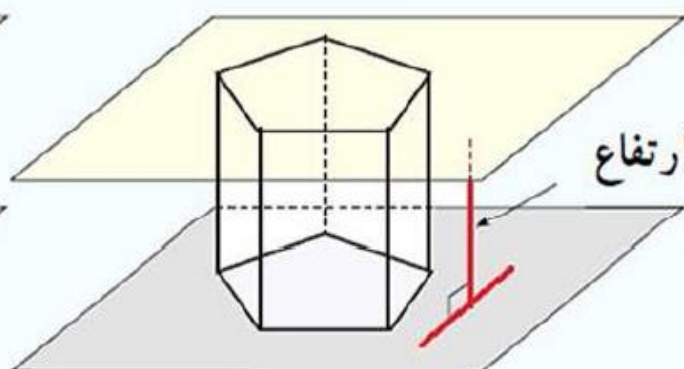
پاره خطی که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است

نکته: همه ی یال‌های جانبی منشور با هم موازیند. (می‌توانید دلیل اش را بیان کنید)

اگر این یال‌ها بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک
اینصورت آن را می‌نامند



منشور مایل



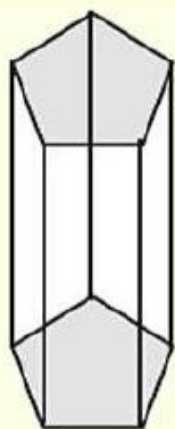
منشور قائم

ارتفاع

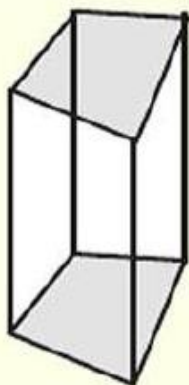
نکته: می‌دانیم که همه وجه‌های جانبی یک منشور متوازی الاضلاع هستند.
حال اگر منشور قائم باشد، این متوازی الاضلاع‌ها مستطیل خواهند شد.

نامگذاری منشورها:

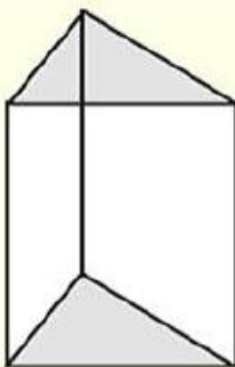
یک منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. به این صورت که اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را قاعده‌ی یک منشور می‌نامند و اگر قاعده‌ی یک منشور باشد، آن را قاعده‌ی یک منشور می‌نامند.



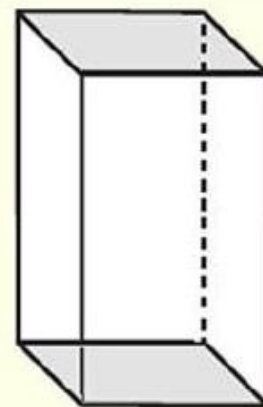
منشور پنج ضلعی



منشور چهار ضلعی



منشور مثلثی



منشور چهار ضلعی

مساحت جانبی و مساحت کل یک منشور:

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی و مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌ها را مساحت کل آن می‌نامند.

نکته: در یک منشور:

$$\text{مساحت کل} =$$

نکته: اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a ، b و c باشند، آنگاه:

مساحت جانبی: $S_h = p \times h = 2(a + b) \times c = 2(ac + bc)$

→

مساحت کل: $S = 2S_{\text{قاعدہ}} + S_h = 2(a \times b) + 2(a + b) \times c$

$= 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

→